Chapitre 1

La construction de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

1.1 Introduction

Dès le collège, on apprend à manipuler les racines carrées, en particulier en relation avec le théorème de Pythagore. Le lycée fait ensuite la part belle aux études de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ éludant la réalité d'un nombre réel pour n'en conserver que l'aspect purement intuitif. Il peut alors sembler curieux d'apprendre ce qu'est une fonction continue, qui, dans l'esprit possède une courbe "traçable" sans lever le crayon.sans se poser la question de la continuité de l'ensemble de départ qu'est $\mathbb{R}$.La continuité d'une fonction suppose que sur un intervalle donné, la courbe ne possède pas de trou,.mais si c'était l'intervalle de départ qui possèdait des trous ? ? ? Il en serait sans doute de même de la courbe. Si on traçe une courbe dont l'ensemble de départ est une partie de $\mathbb{Q}$, la notion de continuité n'a aucun sens.

Cette démarche fut similaire dans l'histoire de math, c'est à dire que l'idée de continuité de $\mathbb{R}$ a de loin précédé sa construction rigoureuse. Un des premiers problèmes qui se posèrent aux mathématiciens grecs fut de construire, à partir d'un carré, un carré d'aire double. Quelle doit être la longueur du côté de ce nouveau carré ?

Les mathématiciens de l'antiquité, qui attendaient bien évidemment un résultat numérique sous forme décimale s'aperçurent, mais après de longues recherches, que le problème n'avait pas de solution. On pouvait certes construire ce carré en utilisant la diagonale du premier, mais cela ne répondait pas à la question numérique ; et pour cause, il n'y a pas, et vous le savez bien, de solution, puisque $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Nous en devons la démonstration, donnée ci-dessous, aux Pythagoriciens (VI^{ème} siècle avant Jésus-Christ).

1.1.1 Irrationnalité de $\sqrt{2}$

Il s'agit de démontrer qu'il n'existe aucun nombre rationnel q tel que $q^2 = 2$.

Lemme 1.1. *Nous aurons besoin de la proprité suivante :*

pour tout entier naturel n, n^2 est pair si et seulement si n l'est.

$\forall n \in \mathbb{N}, n^2$ *pair* $\Leftrightarrow n$ *pair.*

Condition nécessaire *: Procédons par contraposition en supposant n impair.*

Il existe donc un entier k tel que $n = 2k + 1$

$n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$\Rightarrow n^2 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$. *Ainsi, il existe k' entier tel que $n^2 = 2k' + 1$ avec ($k' = 2k^2 + 2k$ qui est entier)*

On a donc démontré que n impair $\Rightarrow n^2$ impair qui prouve par contraposition que n^2 pair $\Rightarrow$ n pair.

***Condition suffisante** : n pair* $\Rightarrow n = 2k$ *donc* $n^2 = 2 \times 2k^2$ *avec* $2k^2$ *entier. donc* n^2 *est pair aussi.*

Démonstration

Démontrons maintenant la propriété proprement dite, et supposons qu'il existe un tel rationnel et que $\frac{a}{b}$ soit son représentant irréductible.

On a donc $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$ avec a et b premiers entre eux, c'est à dire ne possédant pas de diviseur commun autre que 1.

Retenons en particulier, car ce sera la clé de la démonstration qu'ils ne peuvent pas être pairs tous les deux.

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$ qui est un nombre pair. D'après le lemme ci-dessus, a est donc pair.

Ainsi, $a = 2k$ et donc $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{4k^2}{b^2} = 2$ donc $2b^2 = 4k^2$.

On en déduit évidemment que $b^2 = 2k^2$ qui est pair et donc que b est pair d'après le lemme.

La contradiction apparaît alors facilement puisque a et b étant tous deux pairs, $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible.

1.1.2 L'idée de Dedekind

Dedekind, mathématicien allemand né en 1831 et mort en 1916, utilisa la représentation des nombres sur une droite, la droite numérique à laquelle nous sommes maintenant habitués, pour visualiser les nombres qu'il connaissait à l'époque : les entiers et les rationnels. Il remarqua en particulier, que, aucun rationnel n'ayant 2 pour carré, si on représente les rationnels sur cette droite, on aura forcément un petit trou à l'endroit de $\sqrt{2}$ (attention cette notation n'existe pas encore). Et, p et q étant deux rationnels encadrant cette valeur, même si $\mathbb{Q}$ est dense, c'est à dire qu'on peut placer une infinité de rationnels entre p et q, aucun ne viendra "boucher exactement" le trou en $\sqrt{2}$.

C'est ce besoin de continuité qui l'amena à concevoir le nombre réel ; mais comment le définir exactement et surtout rigoureusement ?

1.1.3 Les coupures de Dedekind

Dedekind eut alors l'idée d'appeler coupure (nous en verrons une définition rigoureuse et plus générale ultérieurement), l'ensemble de **<u>rationnels</u>** défini par exemple par : $S_{\sqrt{2}} = \left\{x \in \mathbb{Q}^+, x^2 < 2\right\} \cup \mathbb{Q}^-$ Remarquons tout de même que les réels n'étant pas encore définis, cette notation $\sqrt{2}$ n'a aucun sens et $S_{\sqrt{2}}$ est en fait un anachronisme. De plus, toujours en utilisant un vocabulaire encore interdit (car utilisant des concepts non encore définis) $S_{\sqrt{2}}$ est l'ensemble des **<u>rationnels</u>** contenus dans l'intervalle $\left]-\infty; \sqrt{2}\right[$). On conçoit que cette coupure définit le nombre $\sqrt{2}$ bien que celui-ci n'appartienne pas à la coupure. On aurait envie de dire qu'il en est la borne supérieure, mais là encore, cela suppose le nombre réel défini. On montrera même que cette coupure définit d'une manière bijective ce nombre, c'est à dire qu'à $\sqrt{2}$ correspond la coupure $S_{\sqrt{2}}$ et qu'à $S_{\sqrt{2}}$ correspond le réel $\sqrt{2}$. C'est cette correspondance bijective qui permettra de donner comme définition de $\sqrt{2}$, la coupure $S_{\sqrt{2}}$, . Un réel (irrationnel ici) est défini comme un ensemble infini de rationnels. C'est certes un peu abstrait, mais seule l'efficacité compte, et ici, elle est grande.

Ce n'est pas la première fois qu'une correspondance bijective permet d'assimiler des objets d'essences différentes. Par exemple le point se confond avec son couple de coordonnées cartésiennes, le complexe avec son couple partie réelle, partie imaginaire, mais aussi avec le couple module argument (modulo 2π). Dans $\mathbb{Q}$, on confond aussi le rationnel $\frac{p}{q}$ avec le couple (p, q) . Bref, ici, on confondra $\sqrt{2}$ et $S_{\sqrt{2}}$.

Mais Dédekind eut aussi l'idée de coupures plus simples ; par exmple, r érant un rationnel quelconque, on peut définir la coupure $S_r = \{x \in \mathbb{Q}, x < r\}$. De la même manière que $S_{\sqrt{2}}$ permettait de définit $\sqrt{2}$, S_r permettra de définir r. On voit donc que les coupures permettront aussi de redéfinir les rationnels en tant que réels.

Il est important de bien remarquer dès maintenant que la coupure $S_{\sqrt{2}}$, ensemble de rationnels, ne possède pas de plus grand élément, ni de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. La coupure S_r , elle, ne possède pas de plus grand élément mais possède une borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Cette non existence de plus grand élément sera en effet une des propriétés qui permettront de définir les coupures.

1.1.4 Quelques propriétés de $S_{\sqrt{2}}$

Proposition 1.1. $S_{\sqrt{2}} = \left\{x \in \mathbb{Q}^+, x^2 < 2\right\} \cup \mathbb{Q}^-$, *ne possède pas de plus grand élément.*

Démonstration

Par l'absurde ; Soit M le plus grand élément de $S_{\sqrt{2}}$. On a alors $M \in \mathbb{Q}$ et $M^2 < 2$

On a de plus $M > 0$ (car $0 \in S_{\sqrt{2}}$ et M étant le plus grand élément de $S_{\sqrt{2}}$, $M > 0$)

Posons $a = \frac{M(M^2+6)}{3M^2+2}$ et montrons que $a \in S_{\sqrt{2}}$ et $a > M$.

En effet, $a - M = \frac{M(M^2+6)}{3M^2+2} - M = \frac{2M(2-M^2)}{3M^2+2}$. Or $M^2 < 2 \Rightarrow a - M > 0$ donc $a > M$.

De plus, $a^2 - 2 = \left(\frac{M(M^2+6)}{3M^2+2}\right)^2 - 2 = \frac{M^6-6M^4+12M^2-8}{(3M^2+2)^2} = \frac{(M^2-2)^3}{(3M^2+2)^2}$

Or $M^2 < 2 \Rightarrow a^2 - 2 < 0$ donc $a \in S_{\sqrt{2}}$.

$a \in S_{\sqrt{2}}$ et $a > M$ contredit l'hypothèse : M est le plus grand élément de $S_{\sqrt{2}}$.

Proposition 1.2. $S_{\sqrt{2}} = \left\{x \in \mathbb{Q}^+, x^2 < 2\right\} \cup \mathbb{Q}^-$, *ne possède pas de borne supérieure dans* $\mathbb{Q}$

La proposition énoncée ci-dessus est fondamentale, même si sa démonstration présente peu d'intérêt. Elle prouve en effet qu'un ensemble de rationnel, non vide et majoré peut n'avoir pas de borne supérieure ; c'est dans l'esprit à cause de cette lacune que $\mathbb{Q}$ présente des discontinuités. Nous verrons par contre que dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide et majorée possède une borne sup. En ce qui concerne $S_{\sqrt{2}}$, considéré cette fois comme un ensemble de réels (et non plus de rationnels), on démontrera qu'il admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. Celle-ci est $\sqrt{2}$ vous l'aviez compris.

Démonstration

Rappelons que la borne supérieure d'un ensemble est le plus petit des majorants de l'ensemble. $S_{\sqrt{2}}$ n'ayant pas de plus grand élément, le plus petit majorant, s'il existe et est rationnel, ne peut pas appartenir à $S_{\sqrt{2}}$. C'est donc forcément un rationnel positif dont le carré est supérieur ou égal à 2. L'idée de la démonstration est alors de montrer dans un premier temps que tous les rationnels positifs dont le carré est supérieur ou égal à 2 sont des majorants de $S_{\sqrt{2}}$; on dirait aujourd'hui : $\left\{\begin{array}{c} x^2 \geq 2 \\ x > 0 \\ x \in \mathbb{Q} \end{array}\right. \Rightarrow x > \sqrt{2}$.

Puis on procèdera par l'absurde en supposant que y_0 est la borne supérieure rationnelle de $S_{\sqrt{2}}$ et on montrera qu'il existe un rationnel y positif, dont le carré est supérieur à 2 (c'est donc un majorant de $S_{\sqrt{2}}$), et inférieur à y_0. Cela contredit évidemment l'hypothèse y_0 borne supérieure de $S_{\sqrt{2}}$.

★ Montrons donc que tous les rationnels positifs dont le carré est supérieur ou égal à 2 sont des majorants de $S_{\sqrt{2}}$.

En effet, soit y un tel nombre, c'est à dire $\left\{\begin{array}{c} y > 0 \\ y^2 \geq 2 \end{array}\right.$, alors pour tout x de $S_{\sqrt{2}}$, $\left\{\begin{array}{c} x^2 < 2 \\ y^2 \geq 2 \end{array}\right. \Rightarrow x^2 < y^2$

Or $y > 0$; on a donc $\circ$ soit $x < 0$ et donc forcément $x < 0 < y$ donc $x < y$

∘ soit $x > 0$ et alors $x^2 < y^2 \Rightarrow x < y$ (propriété de $\mathbb{Q}$)

Dans tous les cas, donc pour tout x de $S_{\sqrt{2}}$ on a $y > x$. Donc y majore $S_{\sqrt{2}}$.

★ Supposons maintenant que le rationnel y_0 soit la borne supérieure de $S_{\sqrt{2}}$.On sait qu'alors $y_0 \in \mathbb{Q}$ et $y_0^2 \geq 2$. On a même $y_0^2 > 2$(car aucun rationnel n'a 2 pour carré) et $y_0 > 0$.

Soit y un autre majorant rationnel de $S_{\sqrt{2}}$. Montrons qu'on peut trouver $0 < y < y_0$, c'est à dire $a \in \mathbb{Q}_*^+$ tel que $y = y_0 - a$. qui majore encore $S_{\sqrt{2}}$. Pour cela, trouvons un a tel que : $(y_0 - a)^2 > 2$ avec $y_0 - a > 0 \Rightarrow a < y_0$.

En effet, $(y_0 - a)^2 > 2 \Leftrightarrow y_0^2 - 2ay_0 + a^2 > 2$

$$\Leftrightarrow 2ay_0 < y_0^2 - 2 + a^2$$

Si on choisit a tel que $2ay_0 < y_0^2 - 2$, on a $y_0^2 - 2ay_0 - 2 > 0 \Rightarrow y_0^2 - 2ay_0 - 2 + a^2 > a^2$

$$\Rightarrow (y_0 - a)^2 > a^2 + 2 \text{ donc } (y_0 - a)^2 > 2$$

Ainsi, en choisissant $0 < a < \dfrac{y_0^2 - 2}{2y_0}$ on est assuré que $(y_0 - a)^2 > 2$ (on pourra vérifier qu'on a alors $y = y_0 - a > 0$)

Cette condition suffisante étant remplie on a alors $\left\{ \begin{array}{l} y^2 > 2 \\ y > 0 \end{array} \right.$, donc y majore $S_{\sqrt{2}}$.

Comme de plus $\left\{ \begin{array}{l} y = y_0 - a \\ a > 0 \end{array} \right. \Rightarrow y < y_0, y_0$ n'est plus la borne supérieure de $S_{\sqrt{2}}$ ce qui contredit l'hypothèse.

Il reste à justifier que ce choix de $a \in \left]0; \dfrac{y_0^2 - 2}{2y_0}\right[$ est possible par la densité de $\mathbb{Q}$.

1.2 Définition des nombres réels

1.2.1 Les données du problème

$(\mathbb{Q}, +)$ est un groupe commutatif (c'est à dire que l'addition dans $\mathbb{Q}$ est associative, commutative, admet un élément neutre 0 et que tout rationnel admet un symétrique dans $\mathbb{Q}$). De plus, $\mathbb{Q}$ est totalement ordonné par $\leq$, et dense, c'est à dire qu'entre deux rationnels, on peut toujours en placer un troisième (donc de proche en proche une infinité).

Mais, toute partie majorée de $\mathbb{Q}$ n'admet pas forcément une borne supérieure ($S_{\sqrt{2}}$ par exemple) . On va donc créer $\mathbb{R}$ pour remédier à cela. On dira alors que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe parfait.

1.2.2 Sections de $\mathbb{Q}$

Les coupures de Dedekind sont volontiers appelées aujourd'hui des sections.

On appelle section de $\mathbb{Q}$ toute partie S de $\mathbb{Q}$ possédant les propriétés suivantes :

1. $S \neq \varnothing$ et $S \neq \mathbb{Q}$ (on dit que S est une partie propre de $\mathbb{Q}$)
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2, \left\{ \begin{array}{l} x \in S \\ y \leq x \end{array} \right. \Rightarrow y \in S$ (notons qu'il s'agit ici de l'ordre défini sur $\mathbb{Q}$)
3. S n'a pas de plus grand élément.

On retrouve ainsi clairement les propriétés vue ci-dessus au cours de la présentation des coupures de Dedekind.

On peut ainsi montrer facilement que $S_{\sqrt{2}}$ est une section.(les deux premiers points sont faciles, le troisième a déjà été démontré).

Exemple 1.1. Pour tout rationnel r, $S_r = \{x \in \mathbb{Q}, x < r\}$ est une section

Démonstration

1. $r - 1 \in S_r \Rightarrow S_r \neq \varnothing$ et $r + 1 > r \Rightarrow r + 1 \notin S_r$ donc $S_r \neq \mathbb{Q}$

2. $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2, \left\{ \begin{array}{c} x \in S_r \Rightarrow x < r \\ y \leq x \end{array} \right. \Rightarrow y < r \Rightarrow y \in S_r$ (transitivité de $\leq$ dans $\mathbb{Q}$)

3. Par l'absurde, soit M le plus grand élément de S_r : $\left\{ \begin{array}{c} M < r \\ M \in \mathbb{Q} \end{array} \right.$; $\exists M' \in \mathbb{Q}$, $M < M' < r$ (densité de $\mathbb{Q}$)

Ce qui contredit l'hypothèse M est plus grand élément de S_r

Toute section est strictement majorée

Théorème 1.1. *Un rationnel qui n'appartient pas à une section majore strictement cette section ; une section étant différente de* $\mathbb{Q}$*, un tel majorant existe, et toute section est donc strictement majorée*
Soit S *une section de* $\mathbb{Q}$. $\forall x \in \mathbb{Q}, x \notin S \Rightarrow \forall y \in S, x > y$.

Démonstration

Soit S une section de $\mathbb{Q}$.

$\forall x \in \mathbb{Q}$, mais $x \notin S$. Supposons qu'il existe un y de S tel que $x \leq y$, d'après le second point de définition d'une section, on a alors $x \in S$, ce qui contredit l'hypothèse.

1.2.3 Définition de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

On appelle ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$, l'ensemble des sections de $\mathbb{Q}$. Un nombre réel apparaît donc comme un ensemble infini de rationnels (même si le cerveau n'en retient que la borne supérieure). Cette définition d'un réel comme un ensemble permettra de manipuler le nombre réel avec des outils préexistants, ceux de la théorie de ensembles.

1.2.4 Immersion de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Il s'agit en fait de montrer que tout rationnel est aussi un réel .

On va établir une bijection entre l'ensemble $\sum$ des sections de type S_r et $\mathbb{Q}$. On pourra alors alors identifier chaque section de type S_r à un rationnel.

Soit la fonction $\phi : \mathbb{Q} \longrightarrow \sum$

$$r \longmapsto S_r$$

Pour toute section S_r il existe un rationnel unique r tel que $\phi(r) = S_r$

L'existence est assuré par la définition de $S_r = \{x \in \mathbb{Q} : x < r\}$ qui impose l'existence de r.

Pour l'unicité supposons l'existence de deux rationnels r et r'différents, tels que par exemple :

$r < r'$ et tels que $\phi(r) = \phi(r')$.

D'après la densité de $\mathbb{Q}$, il existe un rationnel x tel que $r < x < r'$. Mais alors $x < r' \Rightarrow x \in S_{r'}$ et $r < x \Rightarrow x \notin S_r$, d'après le théorème 5.1.

On a donc $x \in \phi(r)$ et $x \notin \phi(r')$ donc $\phi(r) \neq \phi(r')$ ce qui contredit l'hypothèse.

D'où l'unicité de r et la bijectivité de la fonction ϕ. On peut donc identifier r et S_r et considérer qu'un rationnel est un réel. On dit qu'on a plongé $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ ou qu'on a immergé $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

1.2.5 Ordre total sur $\mathbb{R}$

Les nombres réels étant des ensembles, on va définir une relation d'ordre naturelle sur les ensembles : l'inclusion.

Lemme 1.2. $\subset$ *est une relation d'ordre. Mais l'ordre n'est en général pas total.*

Démonstration

Rappelons que $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B$

· Réflexivité : $\forall x \in A, x \in A \Rightarrow A \subset A$

· Antisymétrie : $\left\{\begin{array}{l} A \subset B \\ B \subset A \end{array}\right. \Rightarrow A = B$. C'est la défintion même de l'égalité entre deux ensembles.

$A = B$ si et seulement si tout élément de A est élément de B (donc $A \subset B$) et réciproquement (donc $B \subset A$)

· Transitivité : $\left\{\begin{array}{l} A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B \\ B \subset C \Leftrightarrow \forall x \in B, x \in C \end{array}\right. \Rightarrow \forall x \in A, x \in B$ donc $x \in C$ et $A \subset C$.

Mais cet ordre n'est pas total. $\{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4,5\}$ mais $\{1,2,8\} \subset \{1,2,3,4,5\}$ est faux

de même que $\{1,2,3,4,5\} \subset \{1,2,8\}$ est une assertion fausse aussi.

Tous les ensembles ne peuvent donc pas être comparés à l'aide de l'inclusion qui n'est qu'un ordre partiel.

Une relation fondamentale

Définition 1.1. *S_1 et S_2 étant deux réels quelconques (sections de $\mathbb{Q}$), $S_1 \leq S_2 \Leftrightarrow S_1 \subset S_2$.*
On notera $S_1 < S_2 \Leftrightarrow S_1 \subsetneq S_2$ (le signe $\subsetneq$ se lisant inclus au sens strict, donc inclus mais non égal).

Cette relation est une relation d'ordre total

Théorème 1.2. $\leq$ *est alors une relation d'ordre total sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration

$\leq$ hérite naturellement des propriétés de réflexivité, d'antisymétrie et de transitivité de l'inclusion. Elle constitue donc une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Par contre l'ordre qui est partiel dans le cas général devient total sur $\mathbb{R}$, c'est à dire quand il s'agit de sections de $\mathbb{Q}$.

Il s'agit de démontrer que $S_1 \neq S_2 \Rightarrow S_1 \subset S_2$ ou $S_2 \subset S_1$

En effet, $S_1 \neq S_2 \Rightarrow \exists x_1 \in \mathbb{Q}, \left\{\begin{array}{l} x_1 \in S_1 \\ x_1 \notin S_2 \end{array}\right.$ ou $\exists x_1 \in \mathbb{Q}, \left\{\begin{array}{l} x_1 \in S_2 \\ x_1 \notin S_1 \end{array}\right.$. Ces deux cas sont identiques, seul le premier sera traité.

$x_1 \notin S_2$ donc x_1 majore strictement S_2 d'où : $\forall x_2 \in S_2, x_2 < x_1$

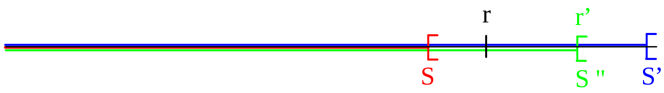
Donc $\forall x_2 \in S_2, \left\{\begin{array}{l} x_2 < x_1 \\ x_1 \in S_1 \end{array}\right. \Rightarrow x_2 \in S_1$ et donc $S_2 \subset S_1$.

Le second cas non traité aurait amené $S_1 \subset S_2$.*On* a donc bien $S_1 \neq S_2 \Rightarrow S_1 \subset S_2$ ou $S_2 \subset S_1$

L'ordre ainsi défini correspond-il à l'ordre intuitif entre les nombres ? Si on trace la droite numérique et qu'on considère les sections comme des demi-droites infinies "vers la gauche", le nombre réel est alors l'extrémité (non incluse) droite. On a bien cette notion d'inclusion pour les demi-droites qui correspond à l'odre naturel concernant les nombres qu'elles définissent.

Densité de $(\mathbb{R}, \leq)$

Théorème 1.3. $(\mathbb{R}, \leq)$ *est dense ce qui signifie que* $\forall (S, S') \in \mathbb{R}$ *tels que* $S < S', \exists S" \in \mathbb{R} : S < S" < S'$ *entre deux réels distincts on peut en "placer" un troisième.*



Démonstration

$S < S' \Rightarrow S \subsetneq S'$.

$$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}, \begin{cases} r \in S' \\ r \notin S \end{cases}$$

Mais r n'est pas le plus grand élément de S' (qui n'en possède pas) donc

$\exists r' \in S', r < r' \Rightarrow S_r \subset S_{r'}$(facile à établir) donc $S_r < S_{r'}$ remarquons que dans $r < r'$ il s'agit de l'ordre dans $\mathbb{Q}$ alors que dans $S_r < S_{r'}$ il s'agit de l'ordre dans $\mathbb{R}$.

L'ordre étant total dans $\mathbb{R}$, $S_{r'}$ et S' sont comparables or $\begin{cases} r' \notin S_{r'} \\ r' \in S' \end{cases}$ donc $S_{r'} \subset S' \Rightarrow S_{r'} < S'$

De plus $\forall x \in S, r \notin S \Rightarrow r > x$

Donc $\forall x \in S, x \in S_r \Rightarrow S \subset S_r$ donc $S \leq S_r$

Donc en récapitulant, $S \leq S_r < S_{r'} < S'$ c'est à dire, en posant $S" = S_{r'}$:

$\forall (S, S') \in \mathbb{R}, S < S' \Rightarrow \exists S" \in \mathbb{R} : S < S" < S'$ d'où la densité de $\mathbb{R}$.

1.2.6 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.4. $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$, *c'est à dire qu'entre deux réels quelconques existe toujours un rationnel.*

Démonstration

Soit S et S' deux réels quelconques distincts et supposons $S < S'$ c'est à dire $S \subsetneq S'$. On est donc assuré de l'existence d'un rationnel x' appartenant à S' mais pas à S.

On a presque déjà le résultat car on va facilement établir que $S \leq S_{x'} < S'$. L'inégalité au sens large étant gênante, on est amené à considérer un z' de S' tel que $x' < z'$ et à montrer que $S < S_{z'} < S'$

Ainsi, $S < S' \Rightarrow \exists x' \in S', x' \notin S$. (donc x' majore strictement S)

Mais S' n'a pas de plus grand élément ; ainsi, $\exists z' \in S', x' < z'$.

Mais, $\forall x \in S, x' \notin S \Rightarrow x < x' < z'$.

★ Ainsi, $\forall u \in S_{x'}, u < x' \Rightarrow u < z' \Rightarrow u \in S_{z'}$ qui prouve que $S_{x'} \subset S_{z'}$ ou encore $S_{x'} \leq S_{z'}$.

Mais comme de plus, $\left\{ \begin{array}{l} x' \in S_{z'} \\ x' \notin S_{x'} \end{array} \right. \Rightarrow S_{x'} \neq S_{z'}$ donc d'après ce qui précède $S_{x'} < S_{z'}$

★ De plus, $\forall v \in S_{z'}, v < z'$. Comme $z' \in S'$ qui est une section de $\mathbb{Q}$, $\left\{ \begin{array}{l} v < z' \\ z' \in S' \end{array} \right. \Rightarrow v \in S'$.

On en déduit évidemment que $S_{z'} \leq S'$, mais comme précédemment, $\left\{ \begin{array}{l} z' \in S' \\ z' \notin S_{z'} \end{array} \right. \Rightarrow S_{z'} \neq S'$ donc $S_{z'} < S'$

★ Enfin, $\forall x \in S, x < x' \Rightarrow x \in S_{x'}$ donc $S \leq S_{x'}$.

Les trois points qui précèdent prouvent que $S \leq s_{x'} < S_{z'} < S'$ donc $S < S_{z'} < S'$.

On a bien intercalé un rationnel $S_{z'}$ entre les deux réels (distincts) quelconques S et S'.

1.2.7 Immersion de $(\mathbb{Q}, \leq)$ dans $(\mathbb{R}, \leq)$

On a vu que tout rationnel est aussi un réel ; il reste à établir que l'ordre défini sur $\mathbb{R}$, est compatible avec celui défini sur $\mathbb{Q}$.

Il suffit pour cela d'établir que $r \leq r' \Leftrightarrow S_r \leq S_{r'}$,

La condition nécessaire est est facile puisque $r \leq r' \Rightarrow \forall x < r, x < r'$ donc $\forall x \in S_r, x \in S_{r'}$ c'est à dire $S_r \leq S_{r'}$

Condition suffisante : $S_r \leq S_{r'} \Rightarrow \forall x \in S_r, x \in S_{r'}$ c'est à dire, $\forall x < r, x < r'$

Montrons par l'absurde qu'on a forcément $r \leq r'$. Supposons en effet $r > r'$.

$\mathbb{Q}$ étant dense, $\exists x \in \mathbb{Q} : r' < x < r \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in S_r \\ x \notin S_{r'} \end{array} \right.$ qui contredit l'hypothèse $S_r \subset S_{r'}$

1.3 Deux théorèmes fondamentaux de l'ordre dans $\mathbb{R}$

Propriété d'une partie non vide et majorée

Théorème 1.5. *Toute partie non vide et majorée (resp : minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp : inférieure)*

Démonstration

Soit E un ensemble de réels non vide majoré, et A l'ensemble des rationnels qui ne majorent pas E.

On va montrer successivement que A est une section de $\mathbb{Q}$ (donc un réel), que A majore E et que c'est le plus petit de ses majorants. Ce sera donc sa borne supérieure

Remarque. Il n'y a aucune contradiction à ce que l'ensemble des rationnels ne majorant pas E (en considérant que chaque rationnel n'est pas un majorant de E) soit, en tant que section, donc de réel, un majorant de E (c'est à dire que tous les éléments de E sont inférieurs à ce réel).

1. $A \neq \emptyset$.

En effet, $E \neq \emptyset \Rightarrow \exists S \in E$, S est un réel, donc une section de $\mathbb{Q}$. Il est non vide et n'admet pas de plus grand élément

Donc $\exists x \in S$ qui n'étant pas son plus grand élément, $\exists y \in S : x \leq y$ avec $y \in S \Rightarrow y \in E$.

x ne majore donc pas S et appartient donc à A qui n'est pas vide.

2. $A \neq \mathbb{Q}$

E étant majoré par S_0 par exemple, $S_0 \neq \mathbb{Q} \Rightarrow \exists x \notin S_0$ et x majore alors strictement S_0.

Ainsi, $\forall x_0 \in S_0, x > x_0$, x_0 étant un majorant de E. On en déduit que x majore E donc $x \notin A$.

3. $\left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ y \leq x \end{array} \right. \Rightarrow y \in A$

En effet, $x \in A \Rightarrow x$ ne majore pas E. Donc, il existe L appartenant à E tel que $x \leq L$.

Or $y \leq x$. On a donc $y \leq L$ et y ne majorant pas E appartient à A.

4. A ne possède pas de plus grand élément :

Supposons $a \in A$ plus grand élément de A. Alors $x \in A \Rightarrow x \leq a$.

Mais $a \in A \Rightarrow a$ ne majore pas E donc $\exists S \in E : a < S$ (avec $S \in \mathbb{R}$)

C'est à dire $\exists y \in S : a < y$ (avec $y \in \mathbb{Q}$ cette fois). On a donc $x \leq a < y$

Mais $a < \dfrac{a+y}{2} < y$ avec $a \in A$ et $y \in E$.

a étant le plus grand élément de $A, a < \dfrac{a+y}{2} \Rightarrow \dfrac{a+y}{2} \notin A$.

Pourtant $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a+y}{2} < y \\ y \in E \end{array} \right. \Rightarrow \dfrac{a+y}{2}$ ne majore pas E donc $\dfrac{a+y}{2} \in A$. Contradiction.

A ce moment de la démonstration, on a établi que A est une section de $\mathbb{Q}$, donc un réel.

5. A majore E

Par l'absurde : supposons qu'il existe x dans E tel que $x > A$. Rappelons que $A \in \mathbb{R}$.

D'après la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $\exists q \in \mathbb{Q} : A < q < x$

Or $A < q \Rightarrow q \notin A$ (puisque A est une section et d'après le théorème 5.1.) majore E.

Ainsi, q n'appartenant pas à A est un majorant de E, ce qui contredit l'hypothèse $q < x$ avec $x \in E$.

6. A est le plus petit majorant de E

Par l'absurde encore ; supposons B majorant de E avec $B < A$.

Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}, \exists q \in \mathbb{Q} : B < q < A$

mais $q < A \Rightarrow q \in A$, donc q ne majore pas E.

Il existe donc x dans E tel que $q \leq x$. Or $B < q$ entraîne $B < x$

Cela contredit l'hypothèse B majorant de E.

Remarques. On prouve ainsi que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure. On démontrerait sans difficulté que toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$. Remarquons de plus que ces propriétés sont fausses dans $\mathbb{Q}$ comme il a déjà été vu ci-dessus.

Propriété carcatéristique de la borne supérieure

Théorème 1.6. *Propriété caractéristique de la borne supérieure dans* $\mathbb{R}$
Soit X *un ensemble de réels,* $M = Sup\,(X) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X, x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, x > M - \varepsilon \end{cases}$

Démonstration

Démontrons en deux étapes la condition nécessaire et la condition suffisante.

Condition nécessaire : M est un majorant de X, donc $\forall x \in X, x \leq M$

Mais c'est le plus petit, donc $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow M - \varepsilon < M \Rightarrow M - \varepsilon$ ne majore plus X donc $\exists x \in X, x > M - \varepsilon$.

Condition suffisante : Montrons que $\begin{cases} \forall x \in X, x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, x > M - \varepsilon \end{cases} \Rightarrow M = Sup\,(X)$

$\forall x \in X, x \leq M \Rightarrow M$ est un majorant de X.

Soit M' un autre majorant de X . Supposons $M' < M$.

Ainsi $M' < M \Rightarrow M - M' > 0$. Posons $\varepsilon = M - M' > 0$.

La seconde condition indique alors que $\exists x \in X, x > M - \varepsilon$, donc $x > M'$ ce qui contredit M' majorant de X.

On a donc démontré par l'absurde que tout autre majorant de X est supérieur ou égal à M qui est donc borne supérieure de X.

Remarques. Cela se traduit en français par : M est supérieur à tous les éléments de X, mais si on retranche une quantité positive, si petite soit elle à M, on pourra trouver un réel de X supérieur à cette valeur. Cette propriété associée à l'existence garantie d'une borne supérieure carctérise $\mathbb{R}$ et porte en elle la propriété sans doute la plus importante de $\mathbb{R}$: la continuité.

1.4 L'addition dans $\mathbb{R}$

1.4.1 Définition de la somme de deux réels

L'addition dans $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Définition 1.2. *S_1 et S_2 étant des réels quelconques, on définit leurs somme $S = S_1 + S_2$ comme étant l'ensemble des rationnels pouvant s'écrire comme somme d'un rationnel appartenant à S_1 et d'un rationnel appartenant à S_2. C'est à dire :*
$S = \{x \in \mathbb{Q}, x = x_1 + x_2 \text{ avec } x_1 \in S_1 \text{ et } x_2 \in S_2\}$

L'opération ainsi définie correspond-elle à l'addition naturelle de deux réels ? Si on ramène une section à sa borne supérieure, comme cela semble intuitif depuis la définition des nombres réels, on comprend que l'ensemble S aura pour borne supérieure la somme des bornes sup de S_1 et de S_2.

L'addition de deux rationnels considérés comme réels donne-elle le même résultat que l'addition des deux mêmes rationnels condidérés comme éléments de $\mathbb{Q}$? Cette question essentielle au sens de la compatibilité et de la cohérence du propos aura sa réponse dans quelques lignes.

Opération interne

Théorème 1.7. *L'addition ainsi définie est une opération interne. C'est à dire que la somme de deux réels est un réel.*

Démonstration

Il faut donc montrer que S est une réel, c'est à dire une section de $\mathbb{Q}$.

$\bigstar \left\{ \begin{array}{l} S_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow S_1 \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_1 \in S_1 \\ S_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow S_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_2 \in S_2 \end{array} \right. \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Q} : x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in S_1$ et $x_2 \in S_2 \Rightarrow x \in S$ et $S \neq \emptyset$

$\bigstar \left\{ \begin{array}{l} S_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow S_1 \neq \mathbb{Q} \Rightarrow \exists x_1 \in \mathbb{Q} \text{ et } x_1 \notin S_1 \\ S_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow S_2 \neq \mathbb{Q} \Rightarrow \exists x_2 \in \mathbb{Q} \text{ et } x_2 \notin S_2 \end{array} \right.$

Considérons alors le réel $x = x_1 + x_2$. Se peut-il qu'il appartienne à S, c'est à dire qu'il s'écrive $x = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in S_1$ et $y_2 \in S_2$

Procédons par l'absurde et posons $x = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in S_1$ et $y_2 \in S_2$

Alors, $x_1 \notin S_1 \Rightarrow x_1 > y_1$ (Théorème 5.1) et de même $x_2 > y_2$

On en déduit, l'addition dans $\mathbb{Q}$ conservant l'ordre, que $x_1 + x_2 > y_1 + y_2$, c'est à dire $x > x$. Contradiction.

Ainsi, $x \in \mathbb{Q}$ mais $x \notin S$. Donc $S \neq \mathbb{Q}$

$\bigstar$ Soit $x \in S$ et $x' \in \mathbb{Q}$ tel que $x' \leq x$, montrons que $x' \in S$.

Alors, $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in S_1$ et $x_2 \in S_2$ d'où $x - x_2 = x_1 \in S_1$

Or $x' \leq x \Rightarrow x' - x_2 \leq x - x_2 \Rightarrow x' - x_2 \leq x_1 \Rightarrow x' - x_2 \in S_1$.

Alors $x' = (x' - x_2) + x_2$ avec $x' - x_2 \in S_1$ et $x_2 \in S_2$ donc $x' \in S$

$\bigstar$ Supposons que S admette un plus grand élément M.

Alors, M peut s'écrire $M = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in S_1$ et $x_2 \in S_2$

Mais, S_1 étant une section de $\mathbb{Q}$, elle n'admet pas de plus grand élément.

Donc il existe X_1 appartenant à S_1 tel que $X_1 > x_1$ et de même X_2 appartenant à S_2 tel que $X_2 > x_2$.

Dès lors le rationnel $X = X_1 + X_2$ appartient à S et est strictement supérieur à M

Ce qui contredit l'hypothèse M plus grand élément de S.

1.4.2 Propriétés de l'addition

Associativité et commutativité de l'addition dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.8. *L'addition dans $\mathbb{R}$ est associative et commutative.*

Démonstration

Ces propriétés sont directement héritées des mêmes propriétés de l'addition dans $\mathbb{Q}$.

Par exemple, $S_1 + S_2 = \{x \in \mathbb{Q}, x = x_1 + x_2 \text{ avec } x_1 \in S_1 \text{ et } x_2 \in S_2\}$

et $S_2 + S_1 = \{x \in \mathbb{Q}, x = x_2 + x_1 \text{ avec } x_1 \in S_1 \text{ et } x_2 \in S_2\}$

Or, dans $\mathbb{Q}, x_2 + x_1 = x_1 + x_2$ donc $S_1 + S_2 = S_2 + S_1$

L'addition dans $\mathbb{R}$ admet un élément neutre

Théorème 1.9. *L'addition dans $\mathbb{R}$, admet pour élément neutre S_0 c'est à dire $\forall S \in \mathbb{R}, S + S_0 = S_0 + S = S$*
Où S_0 est défini par $S_0 = \{x \in \mathbb{Q}, x < 0\}$. (C'est le S_r avec $r = 0$ et c'est donc le zéro de $\mathbb{Q}$).

Démonstration

Il faut montrer que $S + S_0 = S$; la commutativité de l'addition fera le reste.

On va donc établir que $S + S_0 \subset S$ et $S \subset S + S_0$

★ $\forall s \in S + S_0, \exists (x, x_0) \in S \times S_0 : s = x + x_0$

Or $x_0 \in S_0 \Rightarrow x_0 < 0$ donc $x + x_0 < x \Rightarrow s < x$.

On a donc $\begin{cases} s < x \\ x \in S \end{cases} \Rightarrow s \in S$. Ainsi, $\forall s \in S + S_0, s \in S$ donc $S + S_0 \subset S$

★ $\forall s \in S$, S n'a pas de plus grand élément, donc il existe $x \in S$ tel que $s < x$

Donc $s - x < 0$, c'est à dire $s - x \in S_0$.

On peut donc écrire, pour tout s de S, $s = x + (s - x)$ où $s - x \in S_0$ et $x \in S$.

Donc $\forall s \in S, s \in S + S_0$ d'ou $S \subset S + S_0$

Régularité de l'addition dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.10. *L'addition est régulière dans $\mathbb{R}$, c'est à dire que :*
pour tous réels S, S' et S", $S = S' \Leftrightarrow S + S" = S' + S"$

Démonstration

Condition nécessaire : $S = S' \Rightarrow S + S" = S' + S"$

Démontrons la double inclusion : $S = S'$ donc $\forall x \in S, x \in S'$

$\forall x \in S + S", x = s + s"$ avec $s \in S$ et $s" \in S"$. Mais $s \in S \Rightarrow s \in S'$ donc $x \in S' + S"$ et $S + S" \subset S' + S"$

L'autre inclusion se démontre de la même manière et prouve alors l'égalité $S + S" = S' + S"$.

Condition suffisante : $S + S" = S' + S" \Rightarrow S = S'$

Par l'absurde, supposons $S > S'$. Il existe donc $s \in S$ tel que $s \notin S'$.

Dès lors, $\forall s" \in S", s + s" \in S + S"$, mais $s \notin S'$ et donc majore strictement S'.

> Ainsi, $\forall x \in S', x < s \Rightarrow x + s$” $< s + s$” (relation d'ordre dans $\mathbb{Q}$)
>
> Donc $s + s$” majore strictement $S' + S$” et ne peut lui appartenir (car une section n'a pas de plus grand élément).
>
> Ainsi $s + s$” est un élément de $S + S$” qui n'appartient pas à $S' + S$”. Contradiction de l'hypothèse.

1.4.3 Immersion de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

Ce problème est celui de la compatibilité de l'addition définie dans $\mathbb{R}$, avec celle déjà définie dans $\mathbb{Q}$. On cherche donc à démontrer que la somme de deux rationnels considérés comme tels est égale à la somme de ces deux rationnels considérés comme des réels. On cherche donc à démontrer que $S_r + S_{r'} = S_{r+r'}$ ou encore que $\phi(r) + \phi(r') = \phi(r + r')$.

Démonstration

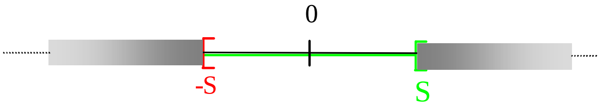
> Démontrons la double inclusion :
>
> $\bigstar S_r + S_{r'} \subset S_{r+r'}$
>
> En effet, $\forall x \in S_r + S_{r'}, x = s + s'$ avec $\left\{ \begin{array}{c} s \in S_r \\ s' \in S_{r'} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} s < r \\ s' < r' \end{array} \right.$
>
> On en déduit que $s + s' < r + r' \Rightarrow x \in S_{r+r'}$
>
> $\bigstar S_{r+r'} \subset S_r + S_{r'}$
>
> $\forall x \in S_{r+r'}, x < r + r' \Rightarrow r + r' - x > 0 \Rightarrow \dfrac{r + r' - x}{2} > 0$ donc $-\dfrac{r + r' - x}{2} < 0$
>
> On a donc $\left\{ \begin{array}{c} r - \dfrac{r + r' - x}{2} < r \\ r' - \dfrac{r + r' - x}{2} < r' \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} r - \dfrac{r + r' - x}{2} \subset S_r \\ r' - \dfrac{r + r' - x}{2} \subset S_{r'} \end{array} \right.$
>
> Or $x = r - \dfrac{r + r' - x}{2} + r' - \dfrac{r + r' - x}{2}$ s'écrit donc comme somme d'un rationnel de S_r et d'un rationnel de $S_{r'}$. On en déduit donc que $x \in S_r + S_{r'}$

1.4.4 Opposé d'un nombre réel

Comment définir l'opposé d'un nombre réel ? Le premier cas facile est celui où le réel est rationnel, c'est à dire dans le cas d'une section du type S_r.

La compatibilité impose de poser $-(S_r) = S_{-r}$.

Dans le cas d'un irrationnel, c'est à dire d'une section ne pouvant pas se mettre sous la forme S_r, un schéma permet de mieux comprendre :



Les parties grisées (l'une infinie "vers la droite", l'autre "vers la gauche") sont symétriques par rapport à 0. Les éléments de $-S$ correspondants par symétrie aux réels n'appartenant pas à S. On a donc envie de penser que $-x \in -S$ si et seulement si $x \notin S$.

Cette nouvelle définition ne convenant pas au cas d'une section de type S_r car $r \notin S_r$ donc $-r$ devrait appartenir à $-S_r$ c'est à dire à S_{-r}, ce qui n'est pas le cas. On est donc obligé de conserver une définition en deux points :

Opposé d'un réel

Définition 1.3. *L'opposé d'un nombre réel S est défini par :*
· *Si S est de type S_r : $-S_r = S_{-r}$*
· *Si S n'est pas de type S_r : $-S = \{x \in \mathbb{Q} : -x \notin \mathbb{S}\}$*

On montre facilement que dans le second cas, $-x \in S \Rightarrow x \notin -S$ et $x \in S \Rightarrow -x \notin -S$

Il reste à prouver que l'ensemble ainsi défini est bien une section (donc un réel),

puis que $S + (-S) = -S + S = S_0$ élément neutre de l'addition.

L'addition dans $\mathbb{R}$ admet un élément neutre

Théorème 1.11. *L'opposé d'un nombre réel est un nombre réel*

Démonstration

Déjà démontré dans le cas d'une section de type S_r puisque S_{-r} est une section.

Dans l'autre cas : Soit S une section de $\mathbb{Q}$ qui n'est pas de type S_r.

★ $S \neq \mathbb{Q} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Q}, x \notin S$. Mais $x \notin S \Rightarrow -x \in -S \Rightarrow -S \neq \emptyset$

★ $S \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in S$. Mais $x \in S \Rightarrow -x \notin -S \Rightarrow -S \neq \mathbb{Q}$

★ $\left\{\begin{array}{c} x \in -S \\ y \leq x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -x \notin S \\ -x \leq -y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x \text{ est un majorant strict de } S \\ -y \geq -x \end{array}\right. \Rightarrow -y$ est un majorant strict de S

On a donc $-y \notin S$ et donc $y \in -S$.

★ Supposons que $-S$ admette M pour plus grand élément. Montrons qu'alors $-S = \{x \in \mathbb{Q}, x \leq M\}$

En effet, $\forall x \in -S, x \leq M$ puisque M est le plus grand élément de $-S$

Réciproquement, $\left\{\begin{array}{c} x \leq M \\ M \in -S \end{array}\right. \Rightarrow x \in -S$ d'après le point précédent.

Ainsi, $x \in -S \Leftrightarrow x \leq M$, d'où le résultat annoncé.

Or $x \in -S \Leftrightarrow -x \notin S$ d'où $-x \notin S \Leftrightarrow x \leq M$ dont la négation est :

$x > M \Leftrightarrow -x \in S$ ou encore, $-x \in S \Leftrightarrow x > M$ donc $-x \in S \Leftrightarrow -x < -M$

Qui prouve que S est une section de type S_r et donc qui contredit l'hypothèse.

L'addition dans $\mathbb{R}$ admet un élément neutre

Théorème 1.12. *Pour tout réel S, $S + (-S) = -S + S = S_0$ élément neutre de l'addition.*
Tout nombre réel S admet un symétrique pour l'addition appelé opposé de S. C'est le réel $-S$

Démonstration

La commutativité de l'addition permet de ne démontrer qu'une seule égalité.

1. Cas d'une section de type S_r : $S_r + (-S_r) \subset S_0$ (rappelons que $-S_r = S_{-r}$).

★ $\left\{ \begin{array}{c} \forall x \in S_r, x < r \\ \forall y \in -S_r, y < -r \end{array} \right. \Rightarrow x + y < 0 \Rightarrow x + y \in S_0.$

★ $\forall x_0 \in S_0, x_0 < 0 \Rightarrow \frac{x_0}{2} < 0$

On a donc $r + \frac{x_0}{2} < r \Rightarrow r + \frac{x_0}{2} \in S_r$

$-r + \frac{x_0}{2} < -r \Rightarrow -r + \frac{x_0}{2} \in S_{-r}$

On a donc, $\forall x_0 \in S_0, x_0 = \left(r + \frac{x_0}{2}\right) + \left(-r + \frac{x_0}{2}\right) \Rightarrow S_0 \subset S_r + S_{-r}$

2. Cas d'une section qui n'est pas de type S_r.

★ $\left\{ \begin{array}{c} \forall x \in S \\ \forall y \in -S, -y \notin S \end{array} \right. \Rightarrow -y > x \Rightarrow x + y < 0 \Rightarrow x + y \in S_0$. Donc $S + (-S) \subset S_0$

★ Pour montrer que $S_0 \subset S + (-S)$, nous aurons besoin du résultat suivant :

Lemme 1.3. $\forall x_0 \in S_0, \exists x \in S : x - x_0 \notin S$. *C'est à dire que pour tout x_0 négatif, en s'approchant suffisamment de la borne supérieure de S, on est certain qu'en retranchant $x_0 < 0$, on "tombera" à droite de la borne sup.*

Démonstration

Par l'absurde supposons que $\forall x \in S, x - x_0 \in S$

Alors, $x - x_0 \in S \Rightarrow x - x_0 - x_0 \in S$ *et par récurrence,* $x - nx_0 \in S$ *pour tout* n.

Or pour $z \notin S$, *soit* $n \geq \dfrac{x - z}{x_0}$.

Alors, $nx_0 \leq x - z$ *(car* $x_0 < 0$*)*

Donc $\left\{ \begin{array}{l} x - nx_0 \geq z \\ z \notin S \text{ (donc majore } S) \end{array} \right. \Rightarrow x - nx_0 \notin S$

D'où la contradiction

Dès lors la démonstration est très simple : $\forall x_0 \in S_0, \exists x \in S : x - x_0 \notin S \Rightarrow x_0 - x \in -S$

D'où $x_0 = (x_0 - x) + x$ s'écrit comme somme d'un élément de S et d'un élément de $-S$

Ainsi, $S_0 \subset S + (-S)$ et la double inclusion démontrée prouve bien que $S + (-S) = S_0$

Proposition 1.3. *Un nombre est négatif ou nul si et seulement si son opposé est positif ou nul*

Cette proposition s'écrit encore $S \leq 0 \Leftrightarrow -S \geq 0$ ou en core $S \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -S$
ou en termes d'inclusions : $S \subset S_0 \Leftrightarrow S_0 \subset -S$.

Démonstration

Condition nécessaire : $S \subset S_0 \Rightarrow S_0 \subset -S$

Suposons $x_0 \in S_0$ mais $x_0 \notin -S$.

Alors, $x_0 \notin -S \Rightarrow -x_0 \in S$. Or $S \subset S_0$ donc $-x_0 \in S_0$.

Mais alors $x_0 \in S_0$ et $-x_0 \in S_0$ est contradictoire.

Condition suffisante : $S_0 \subset -S \Rightarrow S \subset S_0$

Suposons $s \in S$ mais $s \notin S_0$ et rappelons que $-S_0 = S_{-0}$ donc $-S_0 = S_0$ (ou, dans $\mathbb{Q} : 0 = -0$! ! ! !)

Alors, $\left\{ \begin{array}{c} s \in S \\ s \notin S_0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -s \notin -S \\ -s \in -S_0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -s \notin -S \\ -s \in S_0 \end{array} \right.$ ce qui contredit l'hypothèse $S_0 \subset -S$

Corollaire. $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b \Leftrightarrow -b \leq -a$

En effet, $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$ en ajoutant $-b$ à chaque membre.

$\Leftrightarrow -(a-b) \geq 0$

$\Leftrightarrow b - a \geq 0$ en remarquant que $a - b + b - a = 0$ donc $b - a = -(a - b)$

$\Leftrightarrow -a \geq -b$

$\Leftrightarrow -b \leq -a$

1.4.5 L'ordre dans $\mathbb{R}$ est compatible avec l'addition

Compatibilité de la relation d'ordre avec l'addition dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.13. *S et S' étant deux réels quelconques, alors $\forall X \in \mathbb{R}, S + X \leq S' + X \Leftrightarrow S \leq S'$*

Démonstration

Condition suffisante : $S \leq S' \Leftrightarrow S \subset S'$

$\Leftrightarrow \forall s \in S, s \in S'$ dès lors, $\forall y \in S + X, \exists (s, x) \in S \times X : y = s + x$

Mais appartient aussi à S', donc y s'écrit comme somme d'un élément de S' et d'un élément de X. Il appartient donc à $S' + X$.

Ainsi $S + X \subset S' + x$ d'où $S + X \leq S' + x$

Condition nécessaire : Tout réel admet un opposé. Soit $-X$ l'oposé de X.

D'après la conditon nécessaire ci-dessus, $S + X \leq S' + X \Rightarrow S + X - X \leq S' + X - X$

$\Rightarrow S \leq S'$

1.5 La multiplication dans $\mathbb{R}$

1.5.1 Définition

Nul ne s'étonnera du fait que le produit de deux réels dépendra des signes de ceux-ci. Ainsi, sera d'abord défini le produit de deux réels positifs. Les autres cas seront définis à partir de celui-ci.

Produit de deux réels positifs

Définition 1.4. *Le produit de deux réels S et S' **positifs** (c'est à dire $S \geq S_0$ et $S' \geq S_0$) est défini par :*
$S \times S' = \{z \in \mathbb{Q}\ : z = xx'$ *où* $x \in S \cap \mathbb{Q}^{+*}$ *et* $x' \in S' \cap \mathbb{Q}^{+*}\} \cup \mathbb{Q}^{-}$. *noté aussi* SS'

Remarques. Ce produit répond-il à ce qu'on en attend ?Voyons par exemple que $2 \times 3 = S_2 \times S_3 = S_6$.

En effet, $S_2 \times S_3$ est d'après la définition ci-dessus constitué des rationnels négatif et des rationnels positifs obtenus en faisant le produit des rationnels contenus dans $]0;2[$ par ceux de $]0;3[$.

Le nombre ainsi obtenu est donc un rationnel de $]0;6[$.Ainsi, $S_2 \times S_3$ est la réunion de $\mathbb{Q}^-$ et des rationnels de $]0;6[$; c'est bien S_6.

La multiplication dans $\mathbb{R}$

Définition 1.5. *Terminons la définition pour les réels de signes quelconques*
▲ *si* $S \geq S_0$ *et* $S' \leq S_0$: $S \times S' = -(S \times (-S'))$
▲ *si* $S \leq S_0$ *et* $S' \geq S_0$: $S \times S' = -((-S) \times S')$
▲ *si* $S \leq S_0$ *et* $S' \leq S_0$: $S \times S' = (-S) \times (-S')$

La multiplication est une opértion interne dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.14. *Le produit de deux réels est un réel*

Démonstration

Il suffit de démontrer ce théorème dans le cas où les réels sont positifs. Dans les autres cas, il sera facile de conclure en utilisant le fait que l'opposé d'un réel est un réel, puis le fait que le produit de réels positifs est un réel.

1. $\mathbb{Q}^- \subset SS' \Rightarrow SS' \neq \emptyset$

2. $\left\{\begin{array}{l}(S \neq \emptyset \text{ et } S > S_0) \Rightarrow \exists x \notin S, x > 0 \\ (S' \neq \emptyset \text{ et } S' > S_0) \Rightarrow \exists x' \notin S', x' > 0\end{array}\right.$ Montrons alors que $z = xx' \notin SS'$

En effet, $z \in SS' \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\exists y \in S \cap \mathbb{Q}^{+*} \\ \exists y' \in S \cap \mathbb{Q}^{+*}\end{array}\right. \Rightarrow z = yy'$

Mais alors, $\left\{\begin{array}{l}x \notin S \\ y \in S\end{array}\right. \Rightarrow x > y$ et de même $\left\{\begin{array}{l}x' \notin S' \\ y' \in S'\end{array}\right. \Rightarrow x' > y'$

On a donc $\left\{\begin{array}{l}x > y > 0 \\ x' > y' > 0\end{array}\right. \Rightarrow xx' > yy'$ donc $z > z$. contradiction.

3. Soit $\left\{\begin{array}{l}x \in SS' \\ y \in \mathbb{Q}, y \leq x\end{array}\right.$ montrons que $y \in SS'$

Si $y \leq 0$, alors $y \in \mathbb{Q}^- \Rightarrow y \in SS'$

Si $y > 0$, alors $x \in SS' \Rightarrow \exists s \in S \cap \mathbb{Q}^{+*}$ et $\exists s' \in S' \cap \mathbb{Q}^{+*}$ tels que $x = ss'$

Or $y \leq x \Rightarrow y \leq ss' \Rightarrow y = ss' - q$ avec $q \in \mathbb{Q}^+$

On peut toujours supposer $s \leq s'$ (sinon on inverse les rôles) et $y = s\left(s' - \dfrac{q}{s}\right)$

Or $q > 0, s > 0$ donc $\dfrac{q}{s} > 0$ et $s' - \dfrac{q}{s} < s'$ donc $s' - \dfrac{q}{s} \in S'$.

Comme $s \in S$, y s'écrit comme produit d'une rationnel strictement positif de S et d'un autre de S'.

Donc $y \in SS'$

4. SS' n'a pas de plus grand élément.

Supposons que ce plus grand élément existe et ,notons le M.

Alors $M > 0$ et $\begin{cases} \exists m \in S \cap \mathbb{Q}^{+*} \\ \exists m' \in S \cap \mathbb{Q}^{+*} \end{cases}$ tels que $M = mm'$

Or S et S' n'ont pas de plus grands éléments, donc $\begin{cases} \exists n \in S \cap \mathbb{Q}^{+*} : n > m \\ \exists n' \in S \cap \mathbb{Q}^{+*} : n' > m' \end{cases} \Rightarrow nn' \in SS'$

de plus $\begin{cases} n > m \\ n' > m' \end{cases} \Rightarrow nn' > mm'$ qui contredit le fait que $M = mm'$ est plus grand élément de SS'.

1.5.2 Propriétés de la multiplication dans $\mathbb{R}$

Pour être absolument rigoureux, il faudrait envisager tous les cas possibles pour les signes des différents opérandes.

Le plus souvent il sera envisagé le cas $S > S_0$ et $S' > S_0$, les autres cas étant laissés aux bons soins du lecteur, qui n'aura en général qu'à utiliser les propriétés de l'opposé d'un réel.

Commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.15. *La multipliplication dans $\mathbb{R}$ est commutative*
c'est à dire $\forall (S, S') \in \mathbb{R}^2, SS' = S'S$

Démonstration

Il faut démontrer la double inclusion $SS' \subset S'S$ et $S'S \subset SS'$.

$\forall z \in S \times S'$,

▲ si $z \in \mathbb{Q}^- \Rightarrow z \in S'S$

▲ si $z > 0, \exists x \in S \cap \mathbb{Q}^{+*}$, $\exists x' \in S' \cap \mathbb{Q}^{+*}, z = xx'$

mais la commutativité de $\times$ dans $\mathbb{Q}$ permet d'écrire $z = x'x \Rightarrow z \in S'S$.

On a donc bien $S \times S'$

L'autre inclusion se démontre exactement de la même manière

Associativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.16. *La multipliplication dans $\mathbb{R}$ est associative,*
c'est à dire $\forall (S, S', S") \in \mathbb{R}^2, (SS')\, S" = S\,(S'S")$

Démonstration

La démonstration est en tout point analogue à la précédente sauf qu'au moment d'utiliser la commutativité de $\times$ dans $\mathbb{Q}$, on utilise ici son associativité.

Distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.17. *La multipliplication dans $\mathbb{R}$ est distributive par rapport à l'addition, c'est à dire* $\forall (S, S', S") \in \mathbb{R}^3, S(S' + S") = SS' + SS"$ *et* $(S + S') S" = SS" + S'S"$.

Seule sera démontrée la première égalité, la seconde découlant alors de la commutativité de $\times$.

Démonstration

La encore supposons S, S' et $S"$ positifs. alors $SS' + SS" > 0$

$\forall z \in S(S' + S")$

▲ si $z \in \mathbb{Q}^- \Rightarrow \begin{cases} z \in SS' \\ z \in SS" \end{cases}$ Or $SS' + SS" > 0$, donc $z \in SS' + SS"$

▲ si $z > 0, \exists x \in S \cap \mathbb{Q}^{+*}$ et $\exists y \in (S' + S") \cap \mathbb{Q}^{+*} : z = xy$

Or $y \in (S' + S") \cap \mathbb{Q}^{+*} \Rightarrow \exists s' \in S' \cap \mathbb{Q}^{+*}$ et $\exists s" \in S" \cap \mathbb{Q}^{+*} : y = s' + s"$

D'où $z = x(s' + s") \Rightarrow z = xs' + xs"$ (distributivité dans $\mathbb{Q}$)

avec $xs' \in SS' \cap \mathbb{Q}^{+*}$ et $xs" \in SS" \cap \mathbb{Q}^{+*}$.

D'où le résultat.

La multiplication dans $\mathbb{R}$ admet un élément neutre

Théorème 1.18. *S_1 est élément neutre pour $\times$ dans $\mathbb{R}$*
C'est à dire $\forall S \in \mathbb{R}, SS_1 = S_1 S = S$ *avec* $S_1 = \{x \in \mathbb{Q} : x < 1\}$

Démonstration

La commutativité permet de ne démontrer qu'un double inclusion. De plus, là encore, la démonstration n'est proposée que pour $S > S_0$

★ $\forall z \in SS_1$,

Soit $z \in \mathbb{Q}^-$ et $z \in S$

Soit $z > 0$ et $\exists s \in S \cap \mathbb{Q}^{+*}$ et $\exists s_1 \in S_1 \cap \mathbb{Q}^{+*} : z = ss_1$

On a alors $z < s$ puisque $s_1 < 1$. Or $\begin{cases} z < s \\ s \in S \end{cases} \Rightarrow z \in S$

On a donc bien dans tous las cas : $SS_1 \subset S$

★ $\forall z \in S$,

S n'ayant pas de plus grand élément, il existe $z' \in S$ tel que $z' > z$.

De plus, $S > S_0$. On a donc $z' > 0$.

Mais alors, $\begin{cases} z = z' \times \dfrac{z}{z'} \\ 0 < z < z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = z' \times \dfrac{z}{z'} \\ 0 < \dfrac{z}{z'} < 1 \end{cases}$

z s'écrit donc comme produit de $z' \in S$ et de $\dfrac{z}{z'} \in S_1$. Donc $z \in SS_1$ et $S \subset SS_1$

1.5.3 Inverse d'un réel non nul

Définition

Comme lors de la définition de l'opposé d'un réel, nous allons définir un ensemble de rationnels de telle sorte qu'il ait les caractéristiques attendues de l'inverse du réel considéré ; montrer ensuite que cet ensemble de rationnels est bien un réel (section de $\mathbb{Q}$) et enfin, montrer qu'ils'agit bien de l'inverse au sens usuel du terme, et que chaque réel non nul admet donc un inverse.

Tout comme pour l'opposé, on sera amené à étudier séparément les cas S rationnel (section de type S_r) et le cas S non rationnel.

Intuitivement, l'inverse de S_r esr $S_{\frac{1}{r}}$, pour r non nul.

Dans l'autre cas, les éléments de $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ devront vérifier $x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc $\dfrac{1}{x} > \sqrt{2}$, c'est à dire $\dfrac{1}{x}$ n'être pas élément de $S_{\sqrt{2}}$.

D'où l'idée de définition qui suit :

Inverse d'un réel non nul

Définition 1.6. *Soit S un réel **non nul**, on définit un ensemble de rationnels noté $\dfrac{1}{S}$ par :*

★ *Si S est de type S_r, $\dfrac{1}{S^r} = S_{\frac{1}{r}}$ (pour $r \neq 0$)*

★ *Si $S > S_0$ n'est pas de type S_r, $\dfrac{1}{S} = \left\{x \in \mathbb{Q}^{*+} : \dfrac{1}{x} \notin S\right\} \cup Q^-$*

★ *Si $S < S_0$, $\dfrac{1}{S} = -\left(\dfrac{1}{-S}\right)$*

Remarques. 1.Il est évident que cette définition n'aura d'intérêt qu'après avois démontré qu'elle est bien une section de $\mathbb{Q}$, et que le réel ainsi défini vérifie bien $S \times \dfrac{1}{S} = \dfrac{1}{S} \times S = S_1$.

2. La seconde définition pourrait "presque" convenir aux rationnels.

En effet, $x \in S_{\frac{1}{r}} \Rightarrow x < \dfrac{1}{r} \Rightarrow \dfrac{1}{x} > r \Rightarrow \dfrac{1}{x} \notin S_r$.

Cependant, d'après la seconde définition, $r \notin S_r \Rightarrow \dfrac{1}{r} \in S_{\frac{1}{r}}$, ce qui permettrait à $\dfrac{1}{r}$ d'être le plus grand élément de $S_{\frac{1}{r}}$ qui ne pourrait plus être un réel. Le premier point de la définition permet d'exclure ce terme gênant ; une définition en deux points est donc bien une nécessité.

3. Dans chacun des deux cas $\dfrac{1}{x} \in S \Rightarrow x \notin \dfrac{1}{S}$. Cela permettra, quand on aura démontré que $\dfrac{1}{S}$ est un réel, de montrer facilement que l'inverse de $\dfrac{1}{S}$ est S.

Proposition 1.4. *Pour tout réel S non nul, l'ensemble $\dfrac{1}{S}$ défini ci-dessus est un réel.*

Démonstration

Dans le premier cas, aucune démonstration n'est nécessaire puisque $\dfrac{1}{S}$ est aussi du type S_r donc une section de $\mathbb{Q}$.

Pour le second cas, c'est à dire si S n'est pas du type S_r, il suffit de démontrer la propriété pour $S > S_0$, le passage aux valeurs négatives étant facile puisque si $S < S_0$, $\dfrac{1}{S} = -\left(\dfrac{1}{-S}\right)$.

Or $-S > S_0$ donc $\dfrac{1}{-S}$ est un réel, et son opposé $-\left(\dfrac{1}{-S}\right)$ est lui-même un réel. D'où le résultat.

Soit donc une section S qui n'est pas de type S_r et telle que $S > S_0$; (on aurait pu écrire soit un réel S irrationnel et strictement positif)

1. $\mathbb{Q}^- \subset \dfrac{1}{S} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Q}, x \notin S$ Donc $\dfrac{1}{S} \neq \emptyset$.

2. Montrons que $S > S_0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \dfrac{1}{S} \\ \forall y \in \mathbb{Q}, y \leq x \end{array} \right. \Rightarrow y \in \dfrac{1}{S}$

Procédons par disjonction des cas concernant les signes respectifs de x et y pour montrer que $y \in \dfrac{1}{S}$

★ $x \leq 0$ et $y \leq x \Rightarrow y \leq 0$. Donc $y \in \mathbb{Q}^- \Rightarrow y \in \dfrac{1}{S}$.

★ $\left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ y \leq 0 \end{array} \right. \Rightarrow y \in \mathbb{Q}^- \Rightarrow y \in \dfrac{1}{S}$

★ $\left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \end{array} \right.$. Alors, $\left\{ \begin{array}{l} x \in \dfrac{1}{S} \\ x > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \dfrac{1}{x} \notin S$, donc $\forall s \in S, \dfrac{1}{x} > s$.

Si $s = 0, \dfrac{1}{y} \geq \dfrac{1}{x} > s \Rightarrow \dfrac{1}{y} \notin S \Rightarrow y \in \dfrac{1}{S}$

Si $s \neq 0, \dfrac{1}{x} > s \Rightarrow x < \dfrac{1}{s}$.

Or $y \leq x$, donc $y < \dfrac{1}{s} \Rightarrow \dfrac{1}{y} > s$, donc $\dfrac{1}{y} \notin S$ et $y \in \dfrac{1}{S}$.

4. Démontrons par l'absurde que $\dfrac{1}{S}$ n'admet pas de plus grand élément.

$S > S_0$ donc $\dfrac{1}{x} \notin S \Rightarrow \dfrac{1}{x} > 0 \Rightarrow x > 0$ ($x \in \mathbb{Q}$)

Soit M le plus grand élément de $\dfrac{1}{S}$.

$M \in \dfrac{1}{S} \Rightarrow \dfrac{1}{M} \notin S$ donc $\dfrac{1}{M}$ majore strictement S

Or $S > S_0$ donc 0 appartient à S. On en déduit que $\dfrac{1}{M} > 0$

Soit alors un rationnel s de S. Montrons qu'alors il existe un autre nombre $M' < M$ tel que $s < \dfrac{1}{M'}$. Il sera pour cela nécessaire de discuter suivant le signe de s.

$$\bigstar \left\{ \begin{array}{c} \forall s \in S \\ s \leq 0 \end{array} \right. , s \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{M'} > 0 > s \qquad (1)$$

$$\bigstar \left\{ \begin{array}{c} \forall s \in S \\ s > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} s < \dfrac{1}{M} \\ s > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall s \in S \\ s > 0 \end{array} \right. , \frac{1}{s} > M > 0$$

D'après la densité de $\mathbb{Q}, \exists M' \in \mathbb{Q}, \dfrac{1}{s} > M' > M$

Ainsi $\left\{ \begin{array}{c} \forall s \in S \\ s > 0 \end{array} \right. , \dfrac{1}{s} > M' > 0 \Rightarrow s < \dfrac{1}{M'}$ si $s > 0$ $\qquad$ (2)

(1) et (2) prouvent par disjonction des cas que $\dfrac{1}{M'}$ majore strictement S

Donc $\dfrac{1}{M'} \notin S \Rightarrow M' \in \dfrac{1}{S}$.

Ainsi M' est un élément de $\dfrac{1}{S}$ plus grand que M. Contradiction.

Lemme 1.4. $\left\{ \begin{array}{c} \forall x \in \mathbb{Q} \\ 0 < x < 1 \end{array} \right.$ *la suite* (u_n) *de terme général* $u_n = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ *est croissante non majorée.*

Démonstration

1. (u_n) est croissante.En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$

Donc $u_{n+1} - u_n = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$. Or $0 < x < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x} > 1$ donc $\dfrac{1}{x} - 1 > 0$.

On a donc bien $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite est croissante.

2. Pour montrer que (u_n) n'est pas majorée, on va écrire $\dfrac{1}{x} = 1 + a$ $(a > 0)$ et établir par récurrence que pour tout n entier naturel, $u_n \geq 1 + na$ (inégalité dite de Bernouilli)

Soit P_n la proposition $u_n \geq 1 + na$

Initialisation : $u_0 = 1$. P_0 s'écrit alors $1 \geq 1$. Vrai

Hérédité : supposons P_n vraie, c'est à dire $u_n \geq 1 + na$

Alors $u_{n+1} = (1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n (1 + a)$.

Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, $u_{n+1} \geq (1 + na)(1 + a)$

C'est à dire $u_{n+1} \geq 1 + a + na + na^2 \geq 1 + a + na$

On a donc bien $u_{n+1} \geq 1 + (n + 1) a$ qui prouve que P_{n+1} est encore vraie.

Remarques. On a donc démontré que (u_n) croissante non majorée tend vers $+\infty$ (attention, on est dans $\mathbb{Q}$). Ainsi, tout famille de termes de cette suite ne peut être bornée qu'à condition de ne comporter qu'un nombre fini de termes (sinon, n tendant vers $+\infty$, la famille ne pourrait être bornée). C'est cette remarque qui sera utilisée dans la démonstration suivante.

Tout réel non nul admet un inverse

Théorème 1.19. *Tout réel non nul admet un inverse, c'est à dire :*
$\forall S \in \mathbb{R}^*, \exists S' \in \mathbb{R} : SS' = S'S = S_1$ *(élément neutre de* $\times$ *qui pourrait être noté* 1*).*
Ce nombre S' *n'est autre que* $\dfrac{1}{S}$.

Remarques. 1. Nous commenceront par démontrer ce théorème dans le cas d'un réel strictement positif. Ayant ainsi démontré que tout réel strictement positif admet un inverse, pour tout réel $S < 0$ (on pourrait écrire $S < S_0$), son opposé $-S > 0$ admet un inverse S' tel que $(-S)\,S' = S'\,(-S) = S_1$.

Or $(-S)\,S' = S\,(-S')$ et $S'\,(-S) = (-S')\,S$.

Ainsi $S\,(-S') = (-S')\,S = S_1$ prouve que le réel stictement négatif S admet un inverse $-S'$ (opposé de l'inverse de l'opposé de S).

2.Il faudra démontrer ce théorème dans le cas d'un réel rationnel puis dans l'autre cas.

3.Il faudra enfin à chaque fois démontrer la double inclusion $S \times \dfrac{1}{S} \subset S_1$ et $S_1 \subset S \times \dfrac{1}{S}$.

Démonstration

Tout réel de type S_r.avec $r > 0$ admet un inverse

★ $S_r \times S_{\frac{1}{r}} \subset S_1$

$S_r \times S_{\frac{1}{r}} = \left\{z \in \mathbb{Q}\ : z = xx' \text{ où } x \in S_r \cap \mathbb{Q}^{+*} \text{ et } x' \in S_{\frac{1}{r}} \cap \mathbb{Q}^{+*}\right\} \cup \mathbb{Q}^-$

$\forall z \in S_r \times S_{\frac{1}{r}}, (z = xx' \text{ où } x \in S_r \cap \mathbb{Q}^{+*} \text{ et } x' \in S_{\frac{1}{r}} \cap \mathbb{Q}^{+*}) \text{ ou } z \in \mathbb{Q}^-$

si $z \in \mathbb{Q}^-$ alors $z \in S_1$

si $z = xx'$ avec $x \in S_r \cap \mathbb{Q}^{+*}$ et $x \in S_{\frac{1}{r}} \cap \mathbb{Q}^{+*}$

alors $z = xx'$ avec $0 < x < r$ et $0 < x' < \dfrac{1}{r}$ et ainsi, $xx' < 1$

On en déduit que $z \in S_1$ d'où l'inclusion attendue.

★ $S_1 \subset S_r \times \dfrac{1}{S_{\frac{1}{r}}}$

$\forall x_1 \in S_1, x_1 < 1$ donc $\exists z \in \mathbb{Q}^{+*}, x_1 < z < 1$

Alors, $x_1 = zr \times \dfrac{x_1}{z} \times \dfrac{1}{r}$

Or $\left\{\begin{array}{l} z < 1 \\ z \in \mathbb{Q}^{+*} \text{et } r > 0 \end{array}\right. \Rightarrow zr < r \Rightarrow zr \in S_r$

et $\left\{\begin{array}{l} x_1 < z \\ z \in \mathbb{Q}^{+*} \text{et } r > 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x_1}{z} < 1 \\ r > 0 \end{array}\right. \Rightarrow \dfrac{x_1}{z} \times \dfrac{1}{r} < \dfrac{1}{r} \Rightarrow \dfrac{x_1}{z} \times \dfrac{1}{r} \in S_{\frac{1}{r}}$

Ainsi, tout élément x_1 de S_1 s'écrit comme produit d'un élément positif de S_r et d'un élément positif de $S_{\frac{1}{r}}$. D'où l'inclusion annoncée.

On a donc $\begin{cases} S_r \times S_{\frac{1}{r}} \subset S_1 \\ S_1 \subset S_r \times \dfrac{1}{S_{\frac{1}{r}}} \end{cases} \Rightarrow S_r \times S_{\frac{1}{r}} = S_1$

La commutativité de $\times$ montre que $S_r \times S_{\frac{1}{r}} = S_{\frac{1}{r}} \times S_r = S_1$ qui prouve donc que :

$\boxed{\text{Tout réel strictement positif de type } S_r \text{ admet un inverse : } S_{\frac{1}{r}}}$.

Idée de la démonstration dans le cas d'un réel strictement positif qui ne peut pas s'écrire sous forme S_r (donc irrationnel) **:** cherchons par exemple l'inverse du réel 10. (il n'est pas très logique de prendre ici un rationnel, mais ce nest pas gênant et plus facile à comprendre)

On cherche donc à démontrer que $S \times \dfrac{1}{S} \subset S_1$ (ce sera immédiat et je n'en parle pas ici), mais surtout que $S_1 \subset S \times \dfrac{1}{S}$, c'est à dire que tout réel inférieur à 1 peut s'écrire comme produit d'un rationnel de S (donc < 10) et d'un rationnel de $\dfrac{1}{S}$ (donc $< \dfrac{1}{10}$).

Prenons donc un élément x de S_1 par exemple $x = \dfrac{1}{2}$.

Alors $\dfrac{1}{x} = 2 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{x}\right)^n = 2^n$ et les termes de la suite $\left(\dfrac{1}{x}\right)^n = 2^n$ finiront bien par être supérieur à $S = 10$. Il en est ainsi, à partir de $n = 4$.

On a donc 2^3 plus grand élément de la suite appartenant encore à S (donc < 10).

Ainsi, $2^4 > 10 \Rightarrow 2^4 \notin S \Rightarrow \dfrac{1}{2^4} \in \dfrac{1}{S}$.

On en déduit que $x = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{16} \times 8 = \dfrac{1}{2^4} \times 2^3$ avec $\begin{cases} \dfrac{1}{2^4} \in \dfrac{1}{S} \\ 2^3 \in S \end{cases}$

Donc $x \in \dfrac{1}{S} \times S$ et par commutativité de $\times, x \in S \times \dfrac{1}{S}$

Ainsi $S_1 \subset \dfrac{1}{S} \times S$ et $S_1 \subset S \times \dfrac{1}{S}$

Ceci n'est bien sûr pas une démonstration, mais c'en est l'idée.

Démonstration

★ Démontrons d'abord la première inclusion :$S \times \dfrac{1}{S} \subset S_1$

$\begin{cases} \forall x' \in \dfrac{1}{S} \\ x' > 0 \end{cases}, \dfrac{1}{x'} \notin S \Rightarrow \dfrac{1}{x'}$ majore strictement S

Ainsi, $\forall x \in S \cap \mathbb{Q}^{+*}, \dfrac{1}{x'} > x \Rightarrow xx' < 1$ (puisque $x' > 0$)

Ainsi, $\forall x \in S \cap \mathbb{Q}^{+*}, \forall x' \in \dfrac{1}{S} \cap \mathbb{Q}^{+*}\ xx' \in S_1.$

Il reste à considérer les cas :

$x < 0, x' > 0 \Rightarrow xx' < 0$ donc $xx' \in S_1$.

$x > 0, x' < 0 \Rightarrow xx' < 0$ donc $xx' \in S_1$.

$x < 0, x' < 0 \Rightarrow xx' = (-x)(-x')$ avec $-x \in S \cap \mathbb{Q}^{+*}$ et $-x' \in \dfrac{1}{S} \cap \mathbb{Q}^{+*}$ qui ramène au cas précédent.

La commutativité de $\times$ prouve donc que $S \times \dfrac{1}{S} \subset S_1$ et $\dfrac{1}{S} \times S \subset S_1$.

★ Démontrons maintenant que :$S_1 \subset \dfrac{1}{S} \times S$.

Supposons $S > S_1$.

$\forall x \in S_1 \cap \mathbb{Q}^{+*}, 0 < x < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x} > 1$ et d'après le lemme précédent, la suite de terme général $\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ est croissante et non majorée.

Soit l'ensemble $E = \left\{ z \in S : \exists k \in \mathbb{N}, z = \left(\dfrac{1}{x}\right)^k \right\}$. et $A = \left\{ k \in \mathbb{N}, z = \left(\dfrac{1}{x}\right)^k \in S \right\}$

D'après ce qui précède, si ses éléments sont en nombre infini, E ne sera pas majoré.

Or E est manifestement minoré par 1 et majoré par tout élément y n'appartenant pas à S.

En effet, $S \neq \mathbb{Q} \Rightarrow \exists y \notin S$ qui donc majore strictement S et par conséquent majore strictement E.

E est donc majoré ce qui prouve que ses éléments sont en nombre fini. Il en va donc de même de A (si A admettait une infinité d'éléments, il en serait de même de E). Ainsi A est non vide ($S > S_1$ donc $1 \in S$ et donc $1 \in E \Rightarrow 0 \in A$) et comporte un nombre fini d'éléments. Il admet donc un plus grand élément N (propriété d'une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$) et, la suite $\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ étant croissante, $\left(\dfrac{1}{x}\right)^N$ sera le plus grand élément de E.

Ainsi, $\left(\dfrac{1}{x}\right)^N \in S$ et $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{N+1} \notin S$ (la suite est croissante).

Donc $\dfrac{1}{x^{N+1}} \notin S \Rightarrow x^{N+1} \in \dfrac{1}{S}$.

On a donc $\forall x \in S_1 \cap \mathbb{Q}^{+*}, x = x^{N+1} \times \dfrac{1}{x^N}$ avec $\dfrac{1}{x^N} \in S$ et $x^{N+1} \in \dfrac{1}{S}$.

Donc $S_1 \subset \dfrac{1}{S} \times S$ et par commutativité de $\times$: $x = \dfrac{1}{x^N} \times x^{N+1} \Rightarrow S_1 \subset S \times \dfrac{1}{S}$

Supposons maintenant $S < S_1$.

On n'est plus certain que l'ensemble E précédemment défini n'est pas vide. Par exemple, aucun élément de $S_{\frac{1}{2}}$ ne peut être écrit sous forme 3^k (correspondant à $x = \dfrac{1}{3} \in S_1$)

On est alors amené à conduire le même raisonnement que précédemment avec l'ensemble F défini par $F = \left\{ z \in \dfrac{1}{S} : \exists k \in \mathbb{N}, z = \left(\dfrac{1}{x}\right)^k \right\}$.et $B = \left\{ k \in \mathbb{N}, z = \left(\dfrac{1}{x}\right)^k \in \dfrac{1}{S} \right\}$

En effet, $S < S_1 \Rightarrow 1 \notin S \Rightarrow \dfrac{1}{1} = 1 \in \dfrac{1}{S} \Rightarrow 1 \in F$ et $0 \in B$

Ainsi, F est non vide, minoré par 1 et majoré par tout élément n'appartenant pas à $\dfrac{1}{S}$ donc par tout élément de S.

En effet, $\dfrac{1}{S} \neq \mathbb{Q} \Rightarrow \exists y \notin \dfrac{1}{S}$ qui donc majore strictement $\dfrac{1}{S}$ et par conséquent majore strictement F. F est donc majoré ce qui prouve que ses éléments sont en nombre fini. de même que B qui admet un plus grand élément N.

F admet donc un plus grand élément $\left(\dfrac{1}{x}\right)^N$.

Ainsi, $\left(\frac{1}{x}\right)^N \in \frac{1}{S}$ et $\left(\frac{1}{x}\right)^{N+1} \notin \frac{1}{S}$ (la suite est croissante).

Donc $\frac{1}{x^{N+1}} \notin \frac{1}{S} \Rightarrow x^{N+1} \in S$.

On a donc $\forall x \in S_1 \cap \mathbb{Q}^{+*}, x = x^{N+1} \times \frac{1}{x^N}$ avec $\frac{1}{x^N} \in \frac{1}{S}$ et $x^{N+1} \in S$.

Donc $S_1 \subset S \times \frac{1}{S}$ et par commutativité de $\times$: $x = \frac{1}{x^N} \times x^{N+1} \Rightarrow S_1 \subset \frac{1}{S} \times S$.

On en déduit finalement que dans tous les cas, $S_1 \subset S \times \frac{1}{S}$ et $S_1 \subset \frac{1}{S} \times S$.

Ayant établi par ailleurs que $S \times \frac{1}{S} \subset S_1$ et $\frac{1}{S} \times S \subset S_1$, on est assuré que :

$S \times \frac{1}{S} = S_1$ et $\frac{1}{S} \times S = S_1$.

Donc tout réel strictement positif irrationnel admet un inverse : $\frac{1}{S}$

Ayant déjà démontré la propriété pour les rationnels positifs, on en déduit que tout réel strictement positif, (rationnel ou non) admet un inverse.

D'après la remarque du début de paragraphe, il en est ainsi pour tout réel non nul, quel que soit son signe.

Conclusion : Dans $\mathbb{R}$, la multiplication est associative, admet un élément neutre, et tout réel admet un inverse. $(\mathbb{R}, \times)$ est donc un groupe.

La multiplication étant commutative, $(\mathbb{R}, \times)$ est même un groupe commutatif.

La multiplication est régulière dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.20. $\times$ *est régulière dans* $\mathbb{R}$ *c'est à dire que* $\forall (S, S') \in \mathbb{R}^2, \forall X \in \mathbb{R}^*, SX = S'X \Leftrightarrow S = S'$

Démonstration

■ La démonstration sera d'abord faite pour S, S' et X positifs.

Conditon suffisante : Soit à montrer que $\forall (S, S') \in \mathbb{R}^2, \forall X \in \mathbb{R}^*, S = S' \Rightarrow SX = S'X$

On peut remarquer que la condition suffisante est encore vraie pour $X = 0$; c'est la condition nécessaire qui est mise en défaut.

On cherche à démontrer la double inclusion $SX \subset S'X$ et $S'X \subset SX$.

$\forall y \in SX$, de deux choses l'une :

★ soit $y < 0 \Rightarrow y \in S'X$ (puisque $S'X$ contient $\mathbb{Q}^-$)

★ soit $y \geq 0 \Rightarrow \exists s \in S \cap \mathbb{Q}^{+*}, \exists x \in X \cap \mathbb{Q}^{+*}$ tels que $y = sx$.

Mais $S = S' \Rightarrow s \in S' \cap \mathbb{Q}^{+*}$ donc y s'écrit comme produit de deux rationnels positifs, l'un appartenant à

S', l'autre à X. On a ainsi prouvé que $y \in S'X$

Par disjonction des cas, on en déduit que $SX \subset S'X$.

Une démonstration similaire permet de prouver l'autre inclusion, donc l'égalité.

Conditon nécessaire : Soit à montrer que $\forall (S, S') \in \mathbb{R}^2, \forall X \in \mathbb{R}^*, SX = S'X \Rightarrow S = S'$

X étant un réel non nul, il admet un inverse X^{-1}. Ainsi, en utilisant la condition suffisante précédemment démontrée,

$SX = S'X \Rightarrow (SX)\, X^{-1} = (S'X)\, X^{-1}$, donc, en utilisant l'associativité de $\times$: $S = S'$.

■ Si $S > 0, S' > 0$ et $X < 0$, alors $SX = -(S \times (-X))$ et $S'X = -(S' \times (-X))$.avec cette fois, S, S' et $-x$ positifs.

Or d'après ce qui précède, $S \times (-X) = S' \times (-X) \Leftrightarrow S = S'$.

Mais on sait que $\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, x = x' \Leftrightarrow -x = -x'$. Ainsi $SX = S'X \Leftrightarrow -(S \times (-X)) = -(S' \times (-X))$

$$\Leftrightarrow (S \times (-X)) = (S' \times (-X))$$

$$\Leftrightarrow S = S'.$$

Les autres cas sont laissés à la charge du lecteur.

Ordre et multiplication dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.21. $\forall (S, S') \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbb{R}^{+*}, SX \leq S'X \Leftrightarrow S \leq S'$
$\forall (S, S') \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbb{R}^{-*}, SX \leq S'X \Leftrightarrow S \geq S'$

Démonstration

Démontrons la première affirmation de la même manière que dans le théorème précédent.

Pour ce qui est du cas $X < 0$, on sait que $-X > 0$ donc dans ce cas, $SX = -(S \times (-X))$ et $S'X = -(S' \times (-X))$

$SX \leq S'X \Leftrightarrow -(S \times (-X)) \leq -(S' \times (-X))$

$\Leftrightarrow S' \times (-X) \leq S \times (-X)$ d'après le corollaire de la proposition 5.3. ci-dessus.

$\Leftrightarrow S' \leq S$ en utilisant la première affirmation puisque $-X > 0$.

1.5.4 Immersion de $(\mathbb{Q}, \times)$ dans $(\mathbb{R}, \times)$

On cherche à démontrer la compatibilté de la multiplication dans $\mathbb{R}$ avec celle définie sur $\mathbb{Q}$.

On va donc établir que $\forall (r, r') \in \mathbb{Q}, S_{rr'} = S_r \times S_{r'}$.

Il va falloir discuter sur le signe des rationnels r et r', et dans chacun des cas établir la double inclusion.

1. $r > 0$ et $r' > 0$. Rappelons que $S_{rr'} = \{x = qq'$ avec $q \in \mathbb{Q}^{+*} \cap S_r$ et $q' \in \mathbb{Q}^{+*} \cap S_{r'}\} \cup \mathbb{Q}^-$

$\Diamond$ $S_r \times S_{r'} \subset S_{rr'}$. En effet, $\forall x \in S_r \times S_{r'}$.

Soit $x \leq 0 \Rightarrow x \in S_{rr'}$

Soit $x > 0$ et $x = qq'$ avec $\left\{ \begin{array}{c} 0 < q < r \\ 0 < q' < r' \end{array} \right. \Rightarrow 0 < qq' < rr'$

C'est à dire $x \in S_{rr'}$. Ainsi, $\forall x \in S_r \times S_{r'}, x \in S_{rr'}$ donc $S_r \times S_{r'} \subset S_{rr'}$

$\lozenge$ $S_{rr'} \subset S_r \times S_{r'}$. En effet, $\forall x \in S_{rr'}, \begin{cases} x < rr' \\ rr' > 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x}{rr'} < 1$

Soit $x \leq 0$ donc $x \in S_r \times S_{r'}$

Soit $x > 0$. Par densité de $\mathbb{Q}$, on peut choisir un rationnel positif z

tel que $\begin{cases} \dfrac{x}{rr'} < z < 1 \\ z > 0 \end{cases}$ $\quad(\spadesuit)$

On a alors : $x = \dfrac{x}{rr'z} \times r \times \dfrac{rr'z}{r}$ et d'après $(\spadesuit)$ $\dfrac{x}{rr'} < z \Rightarrow \dfrac{x}{rr'z} < 1 \Rightarrow \dfrac{x}{rr'z} \times r < r$ donc $\dfrac{x}{rr'z} \times r \in S_r$. Comme de plus, x, r, et r' sont positifs, $\dfrac{x}{rr'z} \times r \geq 0$ donc $\dfrac{x}{rr'z} \times r \in S_r \cap \mathbb{Q}^{+*}$

et, toujours d'après $(\spadesuit)$ $\begin{cases} z < 1 \\ r > 0 \text{ et } r' > 0 \end{cases} \Rightarrow rr'z < rr' \Rightarrow \dfrac{rr'z}{r} < r'$ donc $\dfrac{rr'z}{r} \in S_{r'}$et là encore $\dfrac{rr'z}{r} \in S_{r'} \cap \mathbb{Q}^{+*}$

Ainsi, $\forall x \in S_{rr'}$ x s'écrit comme produit d'un élément de S_r et d'un élément de $S_{r'}$. Donc $S_{rr'} \subset S_r \times S_{r'}$.

2. Si r et r' sont de signes contraires par exemple : $r > 0$ et $r' < 0$. On sait qu'alors $S_r > S_0$ et $S_{r'} < S_0$

   Par définition de la multiplication dans $\mathbb{R}$, $S_r \times S_{r'} = -\left(S_r \times (-S_{r'})\right)$.

   Or $-S_{r'} = S_{-r'}$ avec cette fois $-r' > 0$.

   D'après ce qui précède, $S_r \times (-S_{r'}) = S_r \times S_{-r'} = S_{r(-r')}$ avec $S_{r(-r')} = S_{-rr'} = -S_{rr'}$.

   En définitive, $S_r \times S_{r'} = -\left(S_r \times (-S_{r'})\right) = -\left(-S_{rr'}\right) = S_{rr'}$

3. Si r et r' sont tous deux négatifs, $S_r \times S_{r'} = (-S_r) \times (-S_{r'}) = S_{-r} \times S_{-r'}$ puisque $-r$ et $-r'$ sont positifs.

   On a donc encore $S_r \times S_{r'} = S_r \times S_{r'}$.

1.6 Différences entre l'ordre dans $\mathbb{Q}$ et l'ordre dans $\mathbb{R}$

1.6.1 Introduction

L'ensemble des réls a été construit dans le but de "boucher les trous" que le placement des rationnels laissaient sur la droite numérique. On a vu comment cette construction a permis de "boucher le trou" de $\sqrt{2}$ et en généralisant un peu, de toutes les racines carrées non entières (qui ne sont jamais rationnelles). On n'est cependant pas certain d'avoir suffisamment **complété** la droite pour la rendre continue. "As-t-on bouché TOUS les trous ?"

L'ensemble $\mathbb{R}$ est dense, mais on a vu avec $\mathbb{Q}$ que dense n'entraînait nullement continu. Les paragraphes ci-dessous vont permettre d'établir que :

★ $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est à dire qu'entre deux réel existe toujours un rationnel (déjà vu).

★ $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est à dire qu'entre deux réel existe toujours un irrationnel..

Ce qui est vrai pour des réels quelconques l'est en particulier pour des rationnels ou des irrationnels. On est donc certain que :

▲ entre deux réels existe toujours un réel

▲ entre deux réels rationnels, existe toujours un rationnel

▲ entre deux réels irrationnels, existe toujours un rationnel

▲ entre deux réels rationnels, existe toujours un rationnel

▲ entre deux réels rationnels, existe toujours un irrationnel

▲ entre deux réels irrationnels, existe toujours un irrationnel

Il existait donc une infinité d'entiers, une infinité "encore plus grande" de rationnels. Il se trouve que les irrationnels sont "encore bien plus nombreux que les rationnels", et qu'à force, on a bouché tous les trous. Mais cette continuité de $\mathbb{R}$ n'est toujours pas établie. Elle le sera dans le dernier paragraphe.

1.6.2 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Déjà vu et démontré ci-dessus.

1.6.3 Densité de $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Densité de $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.22. $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$, *c'est à dire qu'entre deux réels quelconques existe toujours un irrationnel.*

Démonstration

On va d'abord démontrer qu'entre deux rationnels distincts quelconques il existe un irrationnel. On en déduira le théorème énoncé après un raisonnement assez simple.

1. Soit deux rationnels a et b tels $a<b$ et S un irrationnel (section de $\mathbb{Q}$ qui n'est pas de la forme S_r).

Soit de plus c rationnel de S et d un rationnel n'appartenant pas à S (donc $c<d$).

On peut faire le schéma suivant :

L'idée consiste à trouver une bijection f strictement croissante de $[c;d]$ sur $[a;b]$ et l'image de l'irrationnel S sera un irrationnel S' compris entre a et b.

C'est à dire

Soit f la fonction affine définie par : $f:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}$

$$x\mapsto\frac{b-a}{d-c}(x-c)+a.$$

$\dfrac{b-a}{d-c}>0$ donc f est strictement croissante, et bijective comme toute fonction affine non constante. Sa fonction réciproque est aussi une fonction affine, de taux d'accroissement $\dfrac{d-c}{b-a}>0$ donc strictement croissante aussi. On constate de plus facilement que $f(c)=a$ et $f(d)=b$.

Ainsi, bijection oblige, $c<x<d\Leftrightarrow a<f(x)<b$ équivalence qui s'écrit aussi $a<x<b\Leftrightarrow c<f^{-1}(x)<d$

On montrera aussi facilement que $S'=f(S)\Leftrightarrow S=f^{-1}(S')$. (double inclusion).

★ S' est une section de $\mathbb{Q}$.

1.1. $S\neq\mathbb{Q}\Rightarrow\exists x\in\mathbb{Q},x\notin S\Rightarrow\exists x\in\mathbb{Q},f(x)\notin S'\Rightarrow S'\neq\mathbb{Q}$.

1.2.$S\neq\emptyset\Rightarrow\exists x\in S\Rightarrow\exists f(x)\in f(S)\Rightarrow\exists f(x)\in S'\Rightarrow S'\neq\emptyset$

1.3. $\left\{\begin{array}{c} x \in S' \\ y \leq x \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x \in S' \\ f^{-1}(y) \leq f^{-1}(x) \end{array}\right.$ car f^{-1} est strictement croissante.

Ce qui s'écrit encore $\left\{\begin{array}{c} f^{-1}(x) \in S \\ f^{-1}(y) \leq f^{-1}(x) \end{array}\right. \Rightarrow f^{-1}(y) \in S$ puisque S est une section

On a donc $y \in f(S)$ c'est à dire $y \in S'$.

1.4. S' n'a pas de plus grand élément car si M' était ce plus grand élément, il est immédiat que $f^{-1}(M')$ serait plus grand élément de S qui n'en possède pas.

★ S' est un irrationnel, car sinon, $S' \in \mathbb{Q} \Rightarrow f^{-1}(S') \in \mathbb{Q}$ puisque l'image d'un rationnel par une application affine à coefficients rationnels est un rationnel. D'où la contradiction.

★ Montrons enfin que $a < S' < b$.

$\forall x \in S_a, x < a \Rightarrow f^{-1}(x) < f^{-1}(a) \Rightarrow f^{-1}(x) < c \Rightarrow f^{-1}(x) \in S$ puisque $c \in S$ qui est une section.

Ainsi, $x \in f(S)$ et $S_a \subset S'$ donc $S_a \leq S'$ qu'on écrira plutôt ici a $a < S'$

$\forall y \in S', \left\{\begin{array}{c} y = f(x) \\ x \in S \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} y = f(x) \\ x < d \end{array}\right.$ puisque $d \notin S$ donc majore strictement S.

Or $x < d \Rightarrow f(x) < f(d) \Rightarrow y < b \Rightarrow y \in S_b$ donc $S' \subset S_b$ et $S' \leq S_b$. Donc pour résumer $S_a \leq S' \leq S_b$.

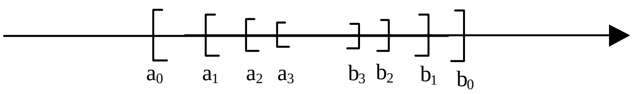
Comme de plus S' est un irrationnel, on est certain que $S' \neq S_a$ et $S' \neq S_b$. d'où $S_a < S' < S_b$.

Et en revenant aux notation rationnelles, c'est à dire en écrivant a pour S_a et b pour S_b, on obtient $a < S' < b$. Entre deux rationnels distincts quelconques existe bien un réel.

2. Montrons qu'il en est de même avec cette fois deux réels distincts quelconque : x et x'.$\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel a entre x et x'. Et pour les mêmes raisons, un rationnel b entre a et x'. Le point précédent permet de placer un irrationnel i entre ces deux rationnels. On a donc pour récapituler ces propos : $x < a < i < b < x'$. Ainsi, entre les réels distincts quelconques existe-t-il bien un irrationnel.

1.6.4 Le théorème de Cantor Dedekind - Complétude (ou continuité) de $\mathbb{R}$

Une première approche consiste à considérer le théorème des suites adjacentes de terminale S. On y démontre que deux suites adjacentes possèdent une limite commune. Si on considère des intervalles emboîtés, qui seront définis rigoureusement dans quelques lignes mais qui peuvent être intuitivemet représentés par le schéma ci-dessous : on met en évidence deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) qui convergent donc vers une même limite réelle l.



On voit donc qu'on peut placer les intervalles emboîtés dans n'importe quelle position, ils définissent une limite commune qui n'est ni plus ni moins que leur intersection (intersection d'un nombre infini d'intervalles). C'est dans ce "n'importe quelle position que réside la continuité de la droite numérique, donc de $\mathbb{R}$. Chaque point de la droite pourra être la limite d'une site définie comme ci-dessus à l'aide d'intervalles embpîtés dont l'intersection est ce point.

Cette approche, pour le moment conceptuelle sera facile à démontrer rigoureusement. Un problème tout de même : la démonstration suppose établi le théorème des suites adjacentes utilise le théorème de la convergence monotone lui même conséquence de la propriété céréctéristisue de la borne supérieure. Il faudra donc pour être rigoureux établir ces théorèmes, mais on peut comprendre dès maintenant que la complétude (ou continuité) de $\mathbb{R}$ est en fait conséquence de la propriété caractéristique de la borne supérieure.

On pourra largement passer directement au théorème de Kantor-Dedekind sans se préoccuper des deux démonstrations qui suivent seulement destinées à la rigueur du propos. Par contre les définitions premières concernant les suites réelles sont supposées connues.

Convergence monotone

Théorème 1.23. *Toute suite crissante (Resp : décroissante) et majorée (Resp : minorée) converge*

Démonstration

Soit (u_n) *une* suite croissnte et majorée.

Il suffit de considérer l'ensemble $E = \{u_n \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}\}$ (u_n) étant majorée, E le sera aussi et E est évidemment non vide. Ainsi E étant non vide et majoré, il admet une borne supérieure M. D'après la propriété caractéristique de la borne supérieure, $\forall \varepsilon > 0, \exists u_{n_0} \in E$ tel que $M - \varepsilon < u_{n_0}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}' n > n_0 \Rightarrow u_n > u_{n_0} > M - \varepsilon$ (la première inégalité due à la croissance de la suite).

ou encore, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}' n > n_0 \Rightarrow M - \varepsilon < u_n < M$ puisque M est borne supérieure.

La suite (u_n) converge donc vers M.

Suites adjacentes

Définition 1.7. *Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si l'une est croissante, l'autre décroissante et si leur différence tend vers 0. C'est à dire* $\begin{cases} (u_n) \ \text{croissante} \\ (v_n) \ \text{décroissante} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0 \end{cases}$

Convergence de suites adjacentes

Théorème 1.24. *Deux suites adjacentes convergent ves la même limite.*

Démonstration

Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes définies comme ci-dessus.

★ La suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est décroissante

En effet, $w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - u_{n+1} - (v_n - u_n)$

$= v_{n+1} - v_n + u_n - u_{n+1}$ avec $v_{n+1} - v_n \leq 0$ et $u_n - u_{n+1} \leq 0$.

★ La suite (w_n) est à termes positifs.

Par l'absurde, supposons $w_{n_0} < 0 \begin{cases} (w_n) \ \text{décroissante} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0 \end{cases} \Rightarrow w_n < 0$. la suite étant décroissante, $\forall n \geq n_0, w_n \leq w_{n_0} < 0$.

Il suffit de choisir un $\varepsilon < |w_{n_0}|$ pour être certain de ne jamais pouvoir rendre $|w_n| < \varepsilon$ et (w_n) ne converge pas vers 0.

On en déduit donc que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n - u_n \geq 0 \Rightarrow u_n \leq v_n$

D'où, compte tenu des monotonies : $u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_{n-1} \leq u_n \leq v_n \leq \cdots \leq v_1 \leq v_0$

★ On déduit de ce qui précède que (u_n) est majorée (par v_0) et croissante. Elle converge donc.

Et de même, (v_n) est minorée (par u_0) et décroissante donc convergente.

Enfin, $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L' \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow L = L'$. Les deux suites ont donc même limite.

De plus, vu les monotonies des suites, on montre facilement que $\forall n \in \mathbb{N}, L \in [u_n; v_n]$. (m^mem principe que pour démontrer que la suite (w_n) est à termes positifs). La limite apparaît donc comme l'intersection de tous les interalles $[u_n; v_n]$. c'est à dire $L = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [u_n; v_n]$ (intersection infinie).

Intervalles emboîtés

Définition 1.8. *Deux intervalles* $[a; b]$ *et* $[a'; b']$ *sont dits emboîtés si et seulement si* $[a'; b'] \subset [a; b]$ *, c'est à dire* $a \leq a' \leq b' \leq b$

Théorème de Cantor Dedekind

Théorème 1.25. *Soit* I_n *une suite d'intervalles* $[a_n; b_n]$ *emboîtés de* $\mathbb{R}$ *dont la longueur tend vers* 0*. On a donc :* $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{I}_{n+1} \subset I_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0 \end{cases}$ *Alors, il existe un réel c et un seul commun à tous ces intervalles. c est la limite commune des suites* (a_n) *et* (b_n)

Démonstration

$p > n \Rightarrow a_n \leq a_p < b_p \leq b_n$.Ainsi, $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_p < b_p \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0$.

Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes.

On a donc, d'après le théorème qui précède : $\exists! c \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq c \leq b_n$.avec $c = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$

Ainsi l'intersection $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n; b_n]$ est réduite à $\{c\}$.

Conclusion : Cette intersection infinie $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n; b_n]$ n'est jamais vide. Il n'y a donc pas de lacune dans $\mathbb{R}$ qui est dit complet.

1.7 Conclusion

Au risque de lasser le lecteur, revoyons ces notion fondamentales.

On a d'abord créé des ensembles d'entiers ($\mathbb{N}$ puis $\mathbb{Z}$) qui réprésentés sur un droite sont "plein de vide". Ce n'est d'ailleurs même pas une doite mais un vague ensemble de points (au sens pixel infinitésimal) séparés par d'énormes trous. Ces ensembles ne sont pas denses, ils sont dits discrets.

L'introduction des nombres rationnels a permis de mettre en évidence la notion de densité, c'est à dire "d'intercalation à l'inifini" et impliquant que tout intervalle d'extrémités distinctes, même ouvert, n'est pas vide (alors que $]2;3[$ est vide dans $\mathbb{Z}$.) Cependant bien que dense, cet ensemble représenté par des points alignés ne définit pas une droite continue (même si les trous sont cette fois beaucoup moins gros). Ces lacunes sont parfaitement comblées, comme le prouve le théorème ci-dessus par l'introduction des nombres irrationnels, c'est à dire la création de $\mathbb{R}$.

Dans cet ensemble $\mathbb{R}$, les rationnels constituent un ensemble dense, mais qui laisse la place pour les irrationnels. Leur nombre est tellement immensément supérieur au nombre des rationnels, que ceux-ci semblent se perdre dans la multitude des points irrationnels (un peu comme les entiers se perdaient dans la multitude des rationnels, mais d'une manière plus flagrante encore). On peut aussi dire que les points rationnels apparaîssent comme des points épars de la droite numérique de telle sorte que si on enlevait ceux-ci, les points irrationnels ne s'en trouveraient pas moins serrés pour autant . Par contre, si on enlevait les irrationnels, la droite numérique serait presque vide.

Voilà ce qui fait la grande différence entre l'ordre de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ qui est dit discret, celui de $\mathbb{Q}$ qui est dit dense et celui de $\mathbb{R}$ qui est dit complet (continu).